EL ÁLGEBRA GEOMÉTRICA COMO MEDIADORA EN EL APRENDIZAJE DE LA FACTORIZACIÓN DE POLINOMIOS

LUZ PATRICIA RODRÍGUEZ QUINTERO

UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE PEREIRA

FACULTAD DE CIENCIAS BÁSICAS

MAESTRÍA EN ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS

PEREIRA

2018

EL ÁLGEBRA GEOMÉTRICA COMO MEDIADORA EN EL APRENDIZAJE DE LA FACTORIZACIÓN DE POLINOMIOS

LUZ PATRICIA RODRÍGUEZ QUINTERO

Trabajo de grado presentado como requisito para optar el título de

Magíster en Enseñanza de las Matemáticas

Director

Dr. ELIÉCER ALDANA BERMÚDEZ

UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE PEREIRA

FACULTAD DE CIENCIAS BÁSICAS

MAESTRÍA EN ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS

PEREIRA

2018

Dedicado a:

Mi hija Stefanía, por ser mi fuerza, mi motor de vida.

Agradecimientos

A Dios por el poder maravilloso que ha puesto en mí.

A mis estudiantes, por su disposición y aceptación al trabajo que realizo día a día y que sin ellos no es posible.

A mi hija, por ser mi inspiración para seguir creciendo como ser humano y profesional.

A mi institución educativa INEM Felipe Pérez, por brindarme los espacios necesarios para hacer realidad esta meta.

Al Ministerio de Educación Nacional, por su programa Becas para la Excelencia Docente, que me dio la oportunidad de mejorar la calidad de mi práctica pedagógica.

Al Dr. Eliécer Aldana Bermúdez director de mi proyecto, por su paciencia y orientaciones; y sobre todo hacerme enamorar de la didáctica.

A todos mis profesores y compañeros de seminario, por las enseñanzas, camaradería y humor, que hicieron de cada jornada un momento especial.

Universidad
Tecnológica
de Pereira

Eliécer Aldana Bermúdez, doctor en Educación Matemática por la Universidad de Salamanca, España y profesor de Didáctica de la Matemática de la Maestría en Enseñanza de la Matemática, en la Universidad Tecnológica de Pereira.

CERTIFÍCA

Que la presente memoria titulada *"El Álgebra Geométrica como mediadora en el Aprendizaje de la Factorización de Polinomios",* ha sido realizada bajo su dirección por *Luz Patricia Rodríguez Quintero* y constituye su trabajo de grado para optar el título de Magister en Enseñanza de la Matemática.

Y para que tenga los efectos oportunos ante la Maestría en Enseñanza de la Matemática de la Universidad Tecnológica de Pereira, en el mes de febrero de dos mil dieciocho (2018).

Fdo. Eliécer Aldana Bermúdez
Director trabajo de grado

RESUMEN

El proyecto "***El Álgebra Geométrica como Mediadora en el Aprendizaje de la Factorización de Polinomios***" expone una investigación de carácter didáctico llevada a cabo con un grupo de estudiantes de grado noveno de la institución educativa INEM Felipe Pérez de Pereira, la cual consiste en la implementación de las fases del modelo de Van Hiele bajo la teoría de los registros de representación semiótica en sus tres actividades cognoscitivas de formación, tratamiento y conversión. La propuesta es aplicar secuencias didácticas en cada fase que permitan a partir del conocimiento de las imágenes conceptuales de los alumnos, de sus conocimientos previos y errores, constatar la significatividad del aprendizaje por medio del álgebra geométrica, utilizando la herramienta didáctica "La Caja de Polinomios" como registro geométrico; en primera instancia, para formar y desarrollar el concepto de variable, seguido del tratamiento de operaciones algebraicas como la suma, la multiplicación y en especial la factorización de polinomios cuadráticos.

Previamente se han estudiado las operaciones visuales en la actividad geométrica y su relación con la actividad semiótica para la formación del concepto geométrico y se han analizado las investigaciones realizadas con dichos marcos teóricos, determinando su viabilidad en el aula.

Palabras clave: Álgebra geométrica, modelo de Van Hiele, registros de representación semiótica, Duval, enseñanza, aprendizaje, factorización, visualización.

Tabla de Contenido

Lista de Ilustraciones

Lista de Tablas

Lista de Ecuaciones

Lista de Anexos

Introducción

La enseñanza del álgebra tradicionalmente se ha resumido en realizar operaciones con expresiones que contienen números y letras, situaciones que los estudiantes generalmente no entienden, ya que tienden a realizar las mismas operaciones aritméticas que venían desarrollando en años anteriores, pero con el ingrediente adicional llamado: variable.

En estos procesos, el estudiante pierde la concepción y comprensión del objeto matemático representado y la representación de los mismos. Esta tendencia a confundir el objeto matemático con su representación y todo el tema de semiótica ha sido estudiada por grandes investigadores de la didáctica en matemática como Duval (1996) , Radford (2006), Godino (2003), D´amore (2004), entre otros, y cuyos obstáculos, errores y dificultades igualmente han sido estudiadas por otros más, como Ruano, Socas & Palarea (2008) y Cerdán (2010).

Igual que ellos, los docentes como pedagogos que somos, nos hacemos las mismas preguntas acerca de las dificultades que identificamos en nuestros estudiantes:

> "*¿Qué hace que la comprensión del Álgebra escolar sea una tarea difícil para la mayoría de los estudiantes? ¿Qué fuerza a muchos estudiantes a recurrir a memorizar reglas del Álgebra? ¿Es el contenido del Álgebra la fuente del problema? ¿O es la forma en que es enseñada lo que causa a los estudiantes no ser capaces de dar sentido a la materia? ¿O hacen los estudiantes un acercamiento a las tareas algebraicas de una manera que es inapropiada para aprender la materia en cuestión?"* (Palarea, 1998, p.1)

En estas investigaciones se han utilizado los diferentes registros de representación en que se puede presentar los objetos del álgebra, es decir, en forma verbal, simbólica, tabular, geométrica, y cartesiana, pues como lo propone Duval (Cerda-Morales, 2011, p.2) para que haya una verdadera comprensión el estudiante debe dominar: *"... al menos dos sistemas semióticos diferentes para producir la representación de un objeto, de una situación, de un proceso y que "espontáneamente" puedan convertir de un sistema semiótico a otro las representaciones producidas, sin siquiera notarlo".*

Por lo anterior, en esta investigación se opta como estrategia de enseñanza y aprendizaje en la factorización de polinomios el uso del lenguaje algebraico y las representaciones geométricas, a través de áreas, perímetros y superficies con material concreto y virtual que permitan que los estudiantes potencien la comprensión de estas expresiones algebraicas, haciendo un especial énfasis en el manejo de la variable como incógnita especifica o valor desconocido.

Este trabajo consta de cinco capítulos, los cuales se resumen de la siguiente manera: Capítulo 1: Expone el título, planteamiento del problema, preguntas del problema y objetivos. Capítulo 2: Contiene el estado del arte con los aspectos más relevantes de investigaciones previas a nivel nacional e internacional. Además la fundamentación teórica en la cual se apoya la investigación, entre las cuales está: la teoría de los registros de representación semiótica de Raymond Duval, la historia del álgebra y su relación con la geometría, la teoría de polinomios y factorización y la Caja de Polinomios como estrategia pedagógica. Capítulo 3: Describe el tipo de investigación, la población con la que se trabajó, la metodología ajustada al modelo de Van Hiele. Capítulo 4: Presenta el análisis que se hace a la información que se obtuvo en las cinco fases. Este análisis es de carácter cualitativo el cual gira en torno al comportamiento y a las respuestas obtenidas de los alumnos con base en el marco teórico; además se puntualizan algunos de los avances o cambios que se lograron en las estructuras mentales de los estudiantes, al construir conceptos algebraicos mediante el uso de representaciones geométricas. Capítulo 5: En él se presentan los principales hallazgos, conclusiones, y proyecciones a las que se llegó mediante la realización de este estudio, de igual manera se exponen algunas recomendaciones dirigidas especialmente a los profesores de matemáticas y también a aquellos interesados en aplicar la propuesta. Finalmente se presentan las referencias bibliográficas y los anexos.

Justificación

Las matemáticas son muy importantes en el desarrollo del pensamiento de las personas, ya que contribuyen a sus capacidades de razonamiento, análisis y visualización. En la mayoría de las culturas y niveles, desde la educación Prescolar hasta varios programas universitarios, se enseñan las matemáticas. Sin embargo, al mismo tiempo, las matemáticas son uno de los cursos más temidos y odiados. Esta polarización es exactamente uno de los problemas más desafiantes que la didáctica de la investigación matemática debe tratar (Hesselbart, 2007).

La actividad matemática se realiza necesariamente en un “contexto de representación”(Duval, 2006 p.157), por eso requiere de distintos sistemas de representación que permitan significar en el estudiante los conceptos matemáticos.

Al respecto Palarea (1998), en su investigación sobre lenguaje algebraico, concluye que el enfoque didáctico más coherente para un acercamiento semiótico al lenguaje algebraico son los contextos numérico y geométrico, ya que las fuentes de significado y los sistemas de representación desempeñan un papel determinante en la comprensión por parte de los estudiantes.

La idea tradicional de realizar un tratamiento del álgebra como si fueran operaciones aritméticas para expresar generalizaciones, ha creado dificultades en su aprendizaje (Butto & Rojano, 2004), motivo que ha llevado a los investigadores a estudiar las raíces del álgebra y concluir que la geometría, históricamente, es un recurso significativo para la comprensión y asimilación en el proceso de enseñanza – aprendizaje.

Por tal razón, como lo menciona Sandoval (2010) en su investigación sobre expresiones algebraicas, la geometría es la representación más recomendada para que los estudiantes se inicien gradualmente en el uso de variables algebraicas ya que facilitan la comprensión y permiten el desarrollo de habilidades para obtener mejores resultados en el manejo del lenguaje algebraico.

De esta manera, las investigaciones sobre los errores y dificultades en la enseñanza y aprendizaje del álgebra siguen siendo un tema que tiene sus fronteras abiertas a la generación de estrategias y herramientas que permitan mejorar los procesos de metacognición en los estudiantes y las prácticas de los maestros.

Por lo tanto, la propuesta es implementar una secuencia didáctica que permita potenciar en estudiantes de grado noveno de la Institución Educativa Inem Felipe Pérez ubicada en la ciudad de Pereira, Risaralda, el manejo de dos o más registros de representación de la factorización de polinomios por medio de actividades que le permitan realizar la formación y el tratamiento correcto de representaciones geométricas polinómicas en material visual, concreto (Caja de polinomios) y virtual, con lo cual el estudiante logre alcanzar la conversión a expresiones verbales y algebraicas.

Capítulo I

Preliminares

1.1.Título.

El Álgebra Geométrica como Mediadora en el Aprendizaje de la Factorización de Polinomios.

1.2.Planteamiento del problema.

En este apartado se dará a conocer algunos de los aspectos más importantes que conducen a la presente investigación como son: el contexto general, dificultades en la enseñanza y aprendizaje del álgebra y las pruebas Internas y Externas en Colombia.

1.2.1. Contexto General.

En Colombia a nivel de educación en matemáticas los documentos guía a nivel nacional son los Lineamientos Curriculares (1998), los Estándares Básicos de competencias (2006) y los Derechos Básicos de Aprendizaje (MEN, 2016), desde allí se presentan propuestas que "*superen las visiones tradicionales que privilegian la simple transmisión y memorización de contenidos, en favor de una pedagogía que permita a los y las estudiantes comprender los conocimientos y utilizarlos efectivamente dentro y fuera de la escuela, de acuerdo con las exigencias de los distintos contextos*" (MEN, 2006).

Es claro también en estos documentos, que la competencia no es independiente de los contenidos temáticos, pues para alcanzarla se requieren muchos conocimientos, habilidades, destrezas, comprensiones, actitudes y disposiciones específicas de la disciplina a trabajar. Son conscientes, y así lo dejan ver, que la propuesta es exigente y retadora pero afirman que no inalcanzable.

Al analizar en los estándares los contenidos que se desprenden de las competencias vemos que el manejo del álgebra toma forma y complejidad en los grados 8° y 9° con el manejo de los polinomios y sus operaciones, prevaleciendo el manejo de la variable en dicho contexto. Es precisamente en esta etapa, donde los estudiantes presentan mayores dificultades de comprensión y aprendizaje, ya que confunden o más bien ignoran la presencia de la variable, la cual la ven como una "cosa" u objeto entre números y operaciones y continúan resolviendo aritméticamente como lo venían realizando en años anteriores; con el agravante de sumar a esta situación, las dificultades del uso de las propiedades de las operaciones en los distintos conjuntos numéricos. Debido a lo anterior, en estos grados es donde se detecta el aumento en el desinterés y apatía por la asignatura, motivo que lleva a desarrollar este trabajo de investigación en grado noveno con el fin de fortalecer las prácticas en la enseñanza del álgebra.

1.2.2. Dificultades en la Enseñanza y Aprendizaje del álgebra.

Las dificultades en el proceso de enseñanza y aprendizaje del álgebra tienen su origen en las comunidades educativas cuyos autores directos son: estudiante, docente, asignatura e institución educativa (Socas, 2011). En este sistema, según el autor, se pueden identificar cinco categorías relacionadas con las dificultades en el aprendizaje de los objetos matemáticos las cuales se pueden resumir así:

- Dificultades asociadas con la complejidad de los objetos matemáticos.
- Dificultades asociadas con los procesos de pensamiento matemático.
- Dificultades asociadas con los procesos de enseñanza desarrollados para el aprendizaje de las matemáticas.
- Dificultades asociadas con los procesos de desarrollo cognitivo de los alumnos.
- Dificultades asociadas con actitudes afectivas y emocionales hacia las matemáticas.

De la misma manera al realizar operaciones con productos notables y factorización se identifican dificultades que obedecen a que el estudiante utiliza técnicas propias y no tiene en cuenta las técnicas que se le enseñan (Olave, Luis & Martínez, 2008), como lo evidencian los siguientes ejemplos:

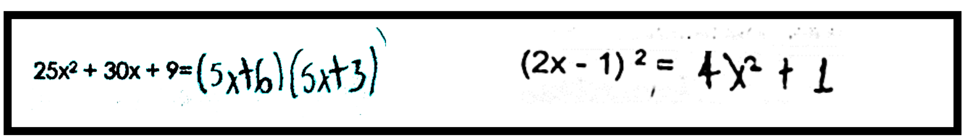


Ilustración 1. Respuestas de estudiantes de grado noveno.

Estas investigaciones sobre errores, obstáculos y dificultades en el aprendizaje del álgebra recaen directamente en los autores de la enseñanza de las matemáticas, quienes tienen la responsabilidad de desarrollar estrategias más efectivas haciendo uso de los resultados de estos estudios, que permitan mejorar sus prácticas y los procesos de aprendizaje en sus estudiantes (Palarea & Socas, 1994).

Respecto a las prácticas de los docentes de matemáticas, algunas investigaciones recomiendan el uso del álgebra geométrica como estrategia para mejorar la comprensión de los estudiantes en el aprendizaje del álgebra, dándole sentido y significado al uso de la variable (Ballén, 2012; Salazar, Jiménez, & Mora, 2013; Morales & Sepúlveda, 1999; Valdivé & Escobar, 2011) y orientándolos a que dispongan de al menos dos sistemas semióticos diferentes para producir la representación del objeto matemático y poder distinguir el objeto de su representación (Cerda-Morales, 2011).

De acuerdo con lo anterior y no ajeno a la realidad de los estudiantes en la Institución Educativa Inem Felipe Pérez, los jóvenes de grado noveno presentan este tipo de errores y dificultades. Por esta razón, el objetivo de este proyecto de investigación es contribuir a mejorar la comprensión del álgebra, el concepto de variable y en especial mejorar el concepto de factorización de polinomios como una de las competencias que se deben alcanzar para establecer equivalencias entre expresiones algebraicas, por medio de la implementación del álgebra geométrica como estrategia para potenciar su comprensión.

1.2.3. Pruebas Internas y Externas en Colombia.

A nivel nacional el Instituto Colombiano para la Evaluación de la Educación (ICFES) aplica las Pruebas Saber 3°, 5° y 9°, junto con los Exámenes de Estado Saber 11°, Saber TyT y Saber Pro, las cuales son un elemento fundamental para determinar los avances en el aprendizaje de los niños y jóvenes del país, en comparación con otras economías participantes alrededor del planeta.

Como complemento, Colombia desde el año 2006 hace parte del Programa para la Evaluación Internacional de Alumnos (PISA, por sus siglas en inglés) el cual evalúa el desempeño de estudiantes de 15 años cada trienio, en áreas como lectura, matemáticas y ciencias por medio de una prueba estandarizada, la cual mide la calidad de la educación en los países miembros de la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (OCDE).

Los resultados de estas evaluaciones brindan información importante para el diseño y la implementación de las políticas educativas que permitan disminuir las brechas existentes en el sistema educativo. Al respecto, en las pruebas PISA, área de matemáticas, Colombia, no ha tenido muy buenos resultados a nivel Latinoamericano ni mundial. En el año 2012, Colombia ocupó el lugar 62 de 65 países, con una puntuación media de 376 en matemáticas, 118 puntos por debajo de la media de la OCDE. Y en el 2015, ocupó la posición 62 de 72 países, con una puntuación media de 390, 100 puntos por debajo de la media de la OCDE, como se puede observar en la Ilustración 2.

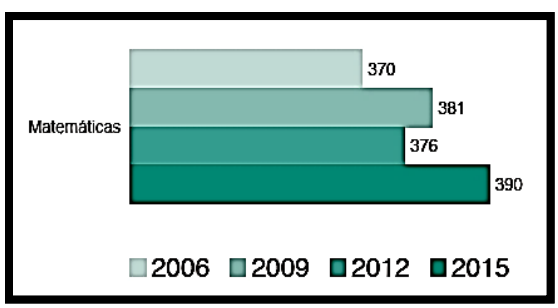


Ilustración 2. Resultados históricos de puntuación de Colombia en pruebas PISA.
Fuente: Resumen ejecutivo Colombia en PISA 2015 (ICFES, 2016).

Así mismo, en el siguiente diagrama de barras (Ilustración 3), se muestra el porcentaje de estudiantes que alcanzan el desempeño más alto y el más bajo en las pruebas, donde Colombia en matemáticas, reúne a más del 60% de los estudiantes en desempeño bajo.

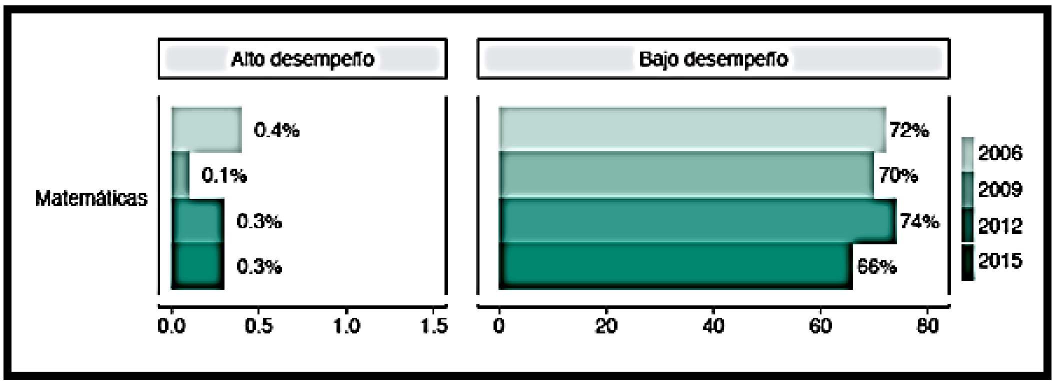


Ilustración 3. Resultado histórico de porcentaje de estudiantes con desempeño más alto y más bajo en Colombia en pruebas PISA.

Fuente. Resumen ejecutivo Colombia en PISA 2015 (ICFES, 2016).

En las pruebas Saber 3, 5, 9 y 11 de los años 2015 y 2016, el desempeño en matemáticas no es muy alentador, en promedio el 54% de los estudiantes de estos grados, se encuentran en los niveles de desempeño Insuficiente y Mínimo, es decir, que no superan las preguntas de menor complejidad o resuelven situaciones que requieren un mínimo de dificultad. [1]

1.3.Preguntas de investigación

En consecuencia, se espera resolver las siguientes preguntas: ¿Es posible por medio de un nuevo registro, como el álgebra geométrica, potenciar la comprensión de la factorización de

[1] INSTITUTO COLOMBIANO DE EVALUACIÓN DE LA EDUCCIÓN, Sobre las Pruebas Saber [En línea] <http://www2.icfes.gov.co/item/2117-estudiantes-de-colegios-oficiales-mueven-positivamente-el-examen-saber-11#)> [Consultado: noviembre 2017].

polinomios en estudiantes de grado noveno? ¿Qué habilidades desarrollan los estudiantes al dominar dos o más sistemas de representación de un objeto matemático?

1.4.Objetivos

1.4.1. Objetivo General.

Potenciar en el estudiante la comprensión de la factorización de polinomios por medio del manejo de varios registros de representación usando el álgebra geométrica con recursos didácticos visuales y concretos.

1.4.2. Objetivos Específicos

- Identificar en los estudiantes, los conocimientos previos que poseen en el proceso de factorización de polinomios de hasta segundo orden, por medio de una prueba diagnóstica.

- Lograr que los estudiantes adquieran un dominio de dos o más registros de representación en el proceso de factorización que los vincule a la comprensión del concepto, por medio de las actividades cognitivas: formación, tratamiento y conversión, para lo cual se utilizan secuencias didácticas.

- Validar o evaluar la propuesta didáctica por medio de una prueba de conocimiento que permita identificar el nivel de comprensión alcanzado.

Capítulo II

Estado del Arte y Referentes Teóricos.

2.1.Estado Del Arte.

Tomando como referencia el objetivo principal de esta investigación, es decir, la implementación del álgebra geométrica como un recurso de transformación en las representaciones semióticas, es necesario resaltar algunas investigaciones a nivel nacional e internacional que nos servirán como apoyo para alcanzar la meta propuesta.

2.1.1. A Nivel Nacional.

Tabla 1. Investigaciones a nivel nacional.

TITULO DE LA INVESTIGACIÓN	AUTOR	UNIVERSIDAD	AÑO
Aprendizaje de los Productos Notables en el Contexto del Álgebra Geométrica, desde los Registros de Representación Semiótica y Secuencias Didácticas de Enseñanza	Carlos Andrés Cuartas Pérez	Universidad del Quindío	2017
Diferencias y puntos de encuentro en el aprendizaje de la factorización de polinomios de la forma ax2 + bx + c y ax3 + bx2 + cx + d (a, b, c y d enteros) en dos ambientes de aprendizaje colaborativo y autónomo con enfoque constructivista mediados por el ordenador.	Mónica isabel arredondo salazar	Universidad Tecnológica de Pereira	2015
El álgebra geométrica como mediadora en la enseñanza de la factorización y los productos notables	Graciela Wagner Osorio Alba Marina Vásquez Giraldo Efraín Alberto Hoyos Salcedo.	Universidad del Quindío	2014

	Heiller Gutiérrez Zuluaga.		
Enseñanza de Factorización, con la ayuda del material didáctico "El Álgebra es un Juego", a los estudiantes del colegio nuestra señora de Fátima.	Hernando Acevedo Ríos	Universidad de Caldas	2014
Propuesta para la enseñanza de las operaciones básicas (adición, sustracción, multiplicación y división) y el proceso de factorización de polinomios, con la herramienta didáctica “caja de polinomios”, en estudiantes de grado octavo de la I.E María Cano del municipio de Medellín	José Martin Villarroel Solis	Universidad Nacional de Colombia, Medellín	2014
Formas de pensamiento algebraico temprano en alumnos de cuarto y quinto grados de Educación Básica Primaria (9 - 10 años)	Rodolfo Vergel Causado	Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá	2014
Tabletas algebraicas, una alternativa de enseñanza del proceso de factorización	Viviana Paola Salazar Fino Sandra Milena Jiménez Ardila Lyda Constanza Mora Mendieta	Universidad Pedagógica Nacional Colombia	2013
El álgebra geométrica como recurso didáctico para la factorización de polinomios de segundo grado	Javier Orlando Ballén Novoa	Universidad Nacional de Colombia, Bogotá	2012
La caja de polinomios	Fernando Soto Saulo Mosquera Claudia Gómez	Unniversidad del Valle	2005

Dichos autores argumentan a través de sus investigaciones la necesidad de trabajar con varios un registros de representación para dar sentido al concepto matemático que se está enseñando, con el uso de herramientas tecnológicas, visuales y concretas puntualizando la importancia de la parte visual en la motivación del estudiante logrando incrementar en él el interés y la disposición para el aprendizaje.

2.1.2. A Nivel Internacional.

Tabla 2. Investigaciones a nivel internacional

TITULO DE LA INVESTIGACIÓN	AUTOR	UNIVERSIDAD	AÑO
Geogebra y los sistemas de representación semióticos	Ana Elena Gruszycki Luis Oteiza Patricia Maras Liliana Gruszycki Hugo Ballésar	Universidad Nacional del Chaco Austral. Argentina	2014
Estudio de los Polinomios en Contexto	Carmen Valdivé Honorio Escobar	Carmen Valdivé Universidad Centroccidental Lisandro Alvarado. Venezuela	2011
La enseñanza del Álgebra en la Educación Obligatoria. Aportaciones de la investigación	Martín Socas	Universidad de La Laguna	2011
Las representaciones geométricas como herramienta para la construcción del significado de expresiones y operaciones algebraicas, desarrollado con alumnos de octavo grado del instituto "San José del Pedregal"	Yelsin Ercilia Sandoval Molina	Universidad Pedagógica Nacional "Francisco Morazán", Tegucigalpa, Honduras	2010
T Percepción geométrica de los productos notables y de la media geométrica	Julio Barreto García	L. B José Antonio Sosa Guillen I. U. T. Antonio José de Sucre Venezuela	2009
Dificultades en la práctica de productos notables y factorización	Teresita Méndez Olave	Liceo Luis Cruz Martínez. Curicó Chile	2008
Productos notables, factorización y ecuaciones de segundo grado con una incógnita, una propuesta didáctica para el bachillerato del colegio de Ciencias y Humanidades	Esther López Hernández	Universidad Nacional Autónoma De México	2008
Procesos cognitivos implicados en el aprendizaje del lenguaje algebraico. Un estudio biográfico	Mercedes Palarea Martín Socas	Universidad de La Laguna España	2000

Registros de representación, el aprendizaje de nociones relativas a funciones: voces de estudiantes	Ismenia Guzmán R.	Universidad de los Lagos. Chile	1998

Estos autores, al igual que los nacionales, concluyen en sus investigaciones la importancia que tienen el uso de los diversos registros de representación de un objeto matemático en el proceso de enseñanza y aprendizaje.

Igualmente proponen la práctica de productos notables y factorización con el álgebra geométrica ya que permite que el alumno razone, infiera y deduzca resultados.

En conclusión, los estudios e investigaciones proclaman la necesidad de incluir en los procesos de enseñanza y aprendizaje del álgebra diferentes registros de representación que permitan complementar la enseñanza tradicional del registro algebraico y permitir de esta manera generar una mayor comprensión en los estudiantes.

Teniendo en cuenta todos estos argumentos se pretende en esta investigación hacer uso del registro geométrico, algebraico y lenguaje natural como recurso para potenciar en los estudiantes la comprensión y uso de la variable como incógnita específica en la medición de figuras geométrica, el fortalecimiento de los procesos geométricos como son las operaciones visuales, la construcción y el razonamiento y las transformaciones entre estos registros, de tal forma que le permita al estudiante alcanzar la noesis en operaciones algebraicas como la suma, la multiplicación y en especial la factorización de polinomios cuadráticos.

2.2.Marco Teórico.

Este trabajo está fundamentado teóricamente en los Registros de Representación Semiótica de Raymond Duval, en los cuales se aborda el concepto de los sistemas de representación semiótica, la clasificación de las representaciones, el concepto de semiosis y noesis, el cambio de registro y la congruencia y no congruencia entre las representaciones. Igualmente se realiza una contextualización histórica del álgebra, el álgebra geométrica, la teoría de polinomios y de la herramienta didáctica "La Caja de Polinomios".

2.2.1. Registros de Representación Semiótica.

Duval afirma que en matemáticas a diferencia de otras ciencias, los objetos no son accesibles en una forma concreta ya que requieren diferentes notaciones simbólicas para poderlos representar como números, gráficos cartesianos, expresiones algebraicas, figuras geométricas, diagramas, esquemas y muchos otros tipos de representación requeridos para la comprensión de esta ciencia que no son más que diferentes sistemas semióticos de representación (Duval, 1999).

Además la actividad matemática requiere que los individuos dominen varios sistemas de representación para un mismo objeto matemático, es decir, deben realizar una coordinación interna entre los diversos sistemas de representación que pueden ser usados, usando uno a la vez, de acuerdo con el propósito de la actividad que se esté realizando; sin esta coordinación dos representaciones diferentes significarán dos objetos diferentes.

De esta manera, para Duval, la actividad de interiorización de estos sistemas de representación corresponde al proceso de la semiosis que al ser desarrollados llevan a la aprehensión del objeto que se está trabajando, es decir a la noesis.

Luego, para que suceda este proceso de semiosis, las representaciones deben permitir tres actividades cognoscitivas fundamentales como son:

- La *formación*: corresponde a las representaciones en un registro semiótico, para "expresar" una representación mental o bien para "evocar" un objeto real.
- El *Tratamiento:* es la transformación que se produce al interior del mismo sistema que se está trabajando de acuerdo con reglas únicas que le son propias del sistema y que producen otra representación en el mismo registro.
- La *Conversión*: es la transformación que se produce al pasar a un registro distinto al de la representación inicial, conservando parte del significado de la representación inicial pero al mismo tiempo da otras significaciones al objeto representado. La conversión es el resultado de la comprensión conceptual y la posibilidad de transferir lo que ha aprendido a nuevos y diferentes contextos, dentro y fuera de las matemáticas.

Todo registro está constituido por un cierto número de unidades significantes elementales. Si es posible hacer corresponder las unidades significantes de una representación con las unidades significantes de la otra representación, se dice que éstas son congruentes.

La congruencia entre registros se define por tres criterios:

- La posibilidad de una correspondencia semántica entre los elementos significantes: a cada unidad significante simple de una de las representaciones, se puede asociar una unidad significante elemental, que son aquellas que dependen del léxico de un registro.

- La univocidad semántica terminal: a cada unidad significante elemental en la representación de salida le corresponde una única unidad significante elemental en el registro de representación de llegada.

- El orden en el cual las unidades significantes están organizadas en ambas representaciones. Las unidades en correspondencia semántica deben ser aprendidas en el mismo orden en las dos representaciones. Este criterio es pertinente solo cuando éstas tienen el mismo número de dimensiones y el grado de no congruencia entre dos representaciones depende de que no se cumplan uno o más de los criterios anteriores (Hesselbart, 2007; Duval, 1999 p 48-51).

En cuanto a las representaciones geométricas Duval (2001) establece que el razonamiento geométrico involucra tres tipos de procesos cognitivos:

- *Procesos de visualización*: se refiere a la representación visual de una proposición geométrica o la exploración heurística de una situación geométrica compleja. Es el proceso donde se hace la identificación de gestalt y configuraciones en 2D o 3D, las cuales dependen de leyes particulares a su construcción y discurso.

- *Procesos de construcción*: utilizando determinadas herramientas (regla, compás, software) se crea un modelo que representa a los objetos matemáticos que se estudian. La acción sobre dicho modelo produce resultados que están relacionados con dichos objetos.

- *Procesos de razonamiento*: son procesos discursivos (lengua natural) utilizados para la extensión del conocimiento, para la explicación o la demostración (proposiciones, definiciones, teoremas).

Duval considera que estos procesos se pueden realizar de forma separada. Es decir que ninguno depende del otro para que se pueda dar, sin embargo, están estrechamente conectados y su dominio es necesario para la competencia geométrica (Duval, 2001). En el siguiente esquema representa las conexiones entre estos tres tipos de procesos:

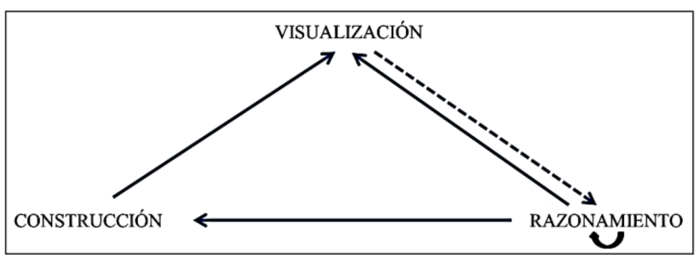


Ilustración 4. Conexión de los procesos cognitivos involucrados en la actividad geométrica (Duval, 1999).

- La construcción ayuda a la visualización.
- El razonamiento apoya a la construcción y a la visualización.
- La visualización no siempre ayuda al razonamiento.
- El razonamiento puede realizarse independientemente de la construcción y la visualización.

De la misma manera el proceso de visualización da paso a cuatro tipos de aprehensiones, como son (Cabello, 2013):

- *La aprehensión perceptiva:* es la identificación simple de una configuración, es decir, lo que se reconoce a primera vista.
- *La aprehensión secuencial:* es la acción cognitiva por la que se identifican las unidades figurativas. Se produce tanto en la construcción de la figura como al describir su construcción.
- *La aprehensión discursiva:* es la acción cognitiva por la que la configuración identificada, se asocia con afirmaciones matemáticas. Este proceso puede darse de dos maneras, según se realice la transferencia, también llamada cambio de anclaje:

  a) Del anclaje visual al discursivo.

  b) Del anclaje discursivo al visual.

- *La aprehensión operativa*: el alumno realiza alguna operación en la configuración inicial, para resolver un problema geométrico.

Las anteriores aprehensiones caracterizan a las distintas actividades de visualización que podemos resumir en el siguiente esquema: (Marmolejo & González, 2013).

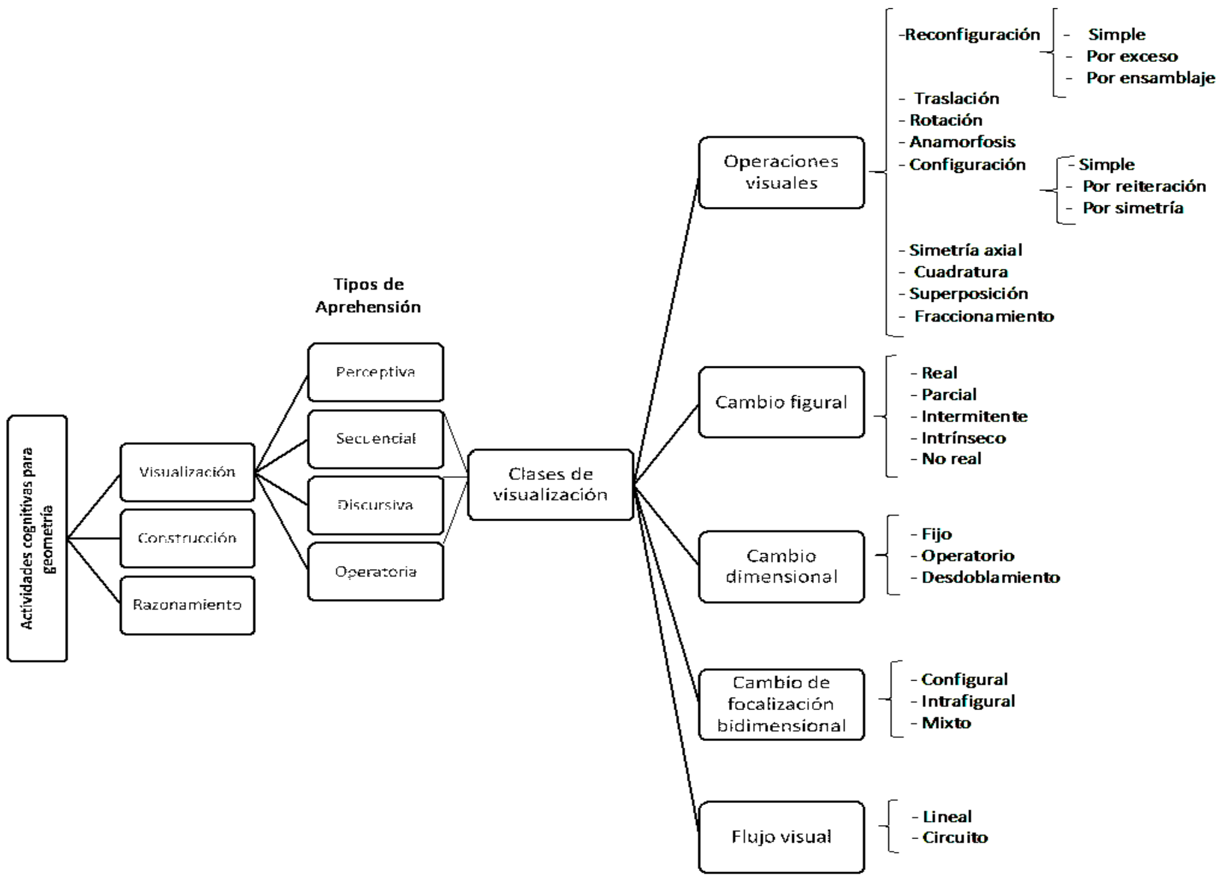


Ilustración 5. Actividad geométrica y sus Operaciones visuales en áreas de regiones poligonales. Fuente: Adaptación Marmolejo & González (2013).

Las operaciones en las cuales se hace énfasis en esta investigación serán: la configuración simple, traslación, rotación, fraccionamiento, cambio figural real, parcial e intermitente, cambio dimensional fijo y por desdoblamiento, cambio de focalización bidimensional configural y flujo visual en circuito. (Anexo A. Operaciones visuales y su relación con la actividad semiótica. Fuente: Adaptación (Cuartas, 2017) y (Marmolejo & González, 2013))

2.2.2. Historia del Álgebra y su relación con la geometría.

Para el desarrollo de la investigación se hace necesario tener los referentes históricos acerca de cómo evoluciona el álgebra desde sus primeros inicios, las situaciones problemáticas que la indujeron, sus dificultades y aciertos a través de las culturas y personajes matemáticos que nos dan aportes importantes en su proceso de enseñanza y aprendizaje.

De acuerdo con los teóricos que han estudiado la historia del álgebra (Ruiz, 2003; Kline, 1972; Puig, 2003; Puig, 1998; Katz & Barton, 2007a), ésta se puede dividir en álgebra *antigua y moderna*. De la misma manera, el álgebra antigua tiene tres etapas de desarrollo denominadas *retórica, sincopada y simbólica*. Estas etapas datan desde los primeros indicios conocidos que fueron en la vieja Mesopotamia con los babilonios (3000 a.C.) hasta los estudios de *análisis o álgebra nueva* de Viéte (s. XVI), las cuales se resumen en el siguiente esquema (Ilustración 6):

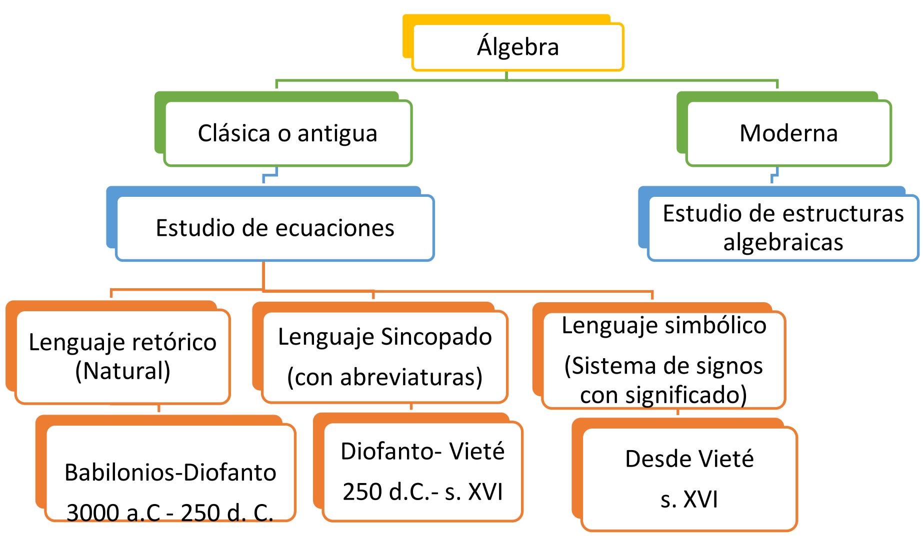


Ilustración 6. Evolución del Álgebra. Fuente: Elaboración propia.

El *álgebra retórica,* se refiere a la etapa en la cual los problemas y situaciones matemáticas eran expresadas en lenguaje verbal, es decir, se argumentaba por medio de palabras y oraciones. El *álgebra sincopada*, se caracteriza por el uso de abreviaciones para las incógnitas, aunque los cálculos se expresan en lenguaje verbal.

Por último el *álgebra simbólica*, se caracteriza por utilizar letras para las incógnitas y los parámetros involucrados en una ecuación. También hay simbolización para las operaciones y se plantean unas reglas bien definidas para la manipulación de los símbolos.

Simultáneo a estas formas de expresar las operaciones se identifican cuatro etapas conceptuales que acompañan en diferentes momentos las expresiones matemáticas y son: *el escenario geométrico, la resolución de ecuaciones estáticas, la función dinámica y la etapa abstracta.* (Katz & Barton, 2007a)

En la primera parte de la historia se evidencia un interés asiduo en el estudio de las ecuaciones en todas sus formas. Es así como inicia la *etapa retórica*, con los primeros indicios o ideas más antiguas que se tienen sobre álgebra con la cultura de los babilonios en la antigua Mesopotamia; allí fueron encontradas unas tablillas de arcilla las cuales evidencian sus alcances en la solución de ecuaciones lineales, cuadráticas y hasta de tercer grado. Su matemática se basó en la solución de problemas de tipo económico, en agrimensura y construcción. Lo interesante para nuestra investigación, es la forma como utilizaron el álgebra en la solución de problemas geométricos, aplicando lo que hoy en día se denomina geometría de “cortar y pegar”. (Katz & Barton, 2007a)

Observemos, como lo propone Sessa (2005), un problema cuadrático de una tablilla del año 1600 a.C. aproximadamente y cómo se hace su interpretación geométrica.

"He sumado la superficie y mi lado de cuadrado: 45. Pondrás 1, la wasitum. *Fraccionarás la mitad de 1 (:30). Multiplicarás 30 y 30 (: 15). Agregarás 15 a 45: l. 1 es (su) raíz cuadrada. Restarás el 30 que has multiplicado de 1 (:30). 30 es el lado del cuadrado."*(Sessa, 2005, p.21)

Dado que los babilonios tenían un sistema de numeración sexagesimal, es difícil de entender, pero traduciéndolo al sistema decimal, quedaría:

"He sumado el cuadrado y mi lado obteniendo ½. Pondrás 1, la unidad (podría ser algo que se tomara como unidad para medir longitudes). Fraccionarás la mitad de 1: ½ .Multiplicarás ½ por ½: ¼. Agregarás ¼ a ¾: 1. Sacarás su raíz cuadrada: 1. Restarás el ½ que has multiplicado de 1: ½. Ése es el lado del cuadrado" (Sessa, 2005, p.22)

Realizando la conversión del lenguaje natural al lenguaje simbólico, esto se podría escribir así: $x^2 + x = \frac{3}{4}$

Cuya forma general corresponde a una ecuación del tipo: $ax^2 + bx + c = 0$; en donde la solución al problema planteado sería a=1 b=1 c= - ¾ .

Completando "cuadrados" resultaría:

$x^2 + x + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4} + \left(\frac{1}{2}\right)^2$, es decir: $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = 1$, de donde: $x + \frac{1}{2} = 1 \rightarrow x = \frac{1}{2}$

Ahora realizando la conversión del lenguaje natural al geométrico, se podría representar de la siguiente manera:

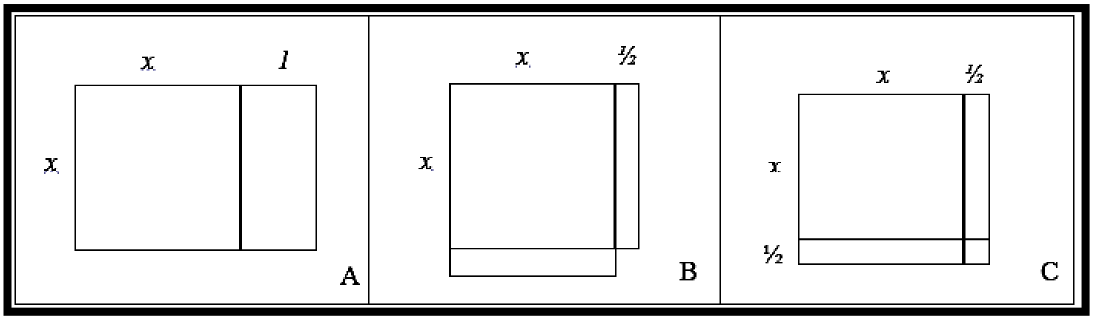


Ilustración 7. Representación geométrica de un problema cuadrático babilonio.(Sessa, 2005)

"*He sumado el cuadrado y mi lado...* " (Ilustracion 7.Esquema A). Cuya superficie total se sabe que es igual a ¾ y donde hay que hallar el valor del lado *x*. Para ello se comienza partiendo el rectángulo en dos rectángulos de igual área y reacomodándolos ("cortar y pegar") (Ilustracion 7. Esquema B). Luego se completa la figura hasta obtener un cuadrado, para lo cual hay que agregar un cuadradito de lado ½. (Ilustración 7. Esquema C)

El área de la nueva figura medirá $\frac{3}{4}+\left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1$; y por tanto su lado medirá $\sqrt{1} = 1$. Pero como el lado de la nueva figura es $x+\frac{1}{2}$, de allí resulta el valor de *x*, que es $1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$.

Los babilonios no tenían nada similar en sus tabletas, todo lo describieron en lenguaje natural realizando operaciones mentales que en palabras de Duval (Duval, 1991) se denominan representaciones mentales o internas.

En Grecia (600 a.C – 600 d.C.), nos referiremos en especial al trabajo geométrico que hicieron con el álgebra el cual se evidencia en los trabajos de Euclides y Apollonius. En el libro II de los *Elementos de Euclides* usa figuras geométricas para representar magnitudes creando todo un lenguaje y tratamiento geométrico para las operaciones algebraicas, es decir: "*los números son sustituidos por segmentos de recta y las operaciones se realizan por medio de construcciones geométricas, el producto de dos números se convierte en el área del rectángulo cuyos lados tienen como longitudes esos dos números, el producto de tres segmentos es un volumen, la suma de dos números es igual a la prolongación de un segmento en longitud igual a la de otro, la resta es recortar de un segmento la longitud del segundo, la división se indica por la razón entre los segmentos que lo representan*" (Kline, 1992 p.98).

Veamos algunas de sus proposiciones en las cuales desempeña un papel primordial el álgebra geométrica.

Proposición 1: Si hay dos rectas *a* y *l*, y una de ellas "*l*" se corta en un número cualquiera de segmentos, el rectángulo comprendido por las dos rectas es igual a los rectángulos comprendidos por la recta no cortada y cada uno de los segmentos. (Ballén, 2012)

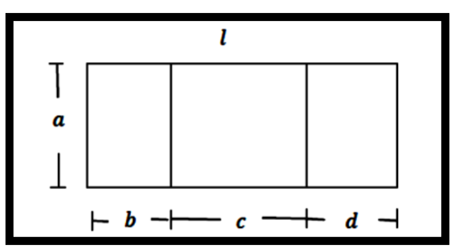


Ilustración 8. Representación geométrica de la Proposición 1 del Libro II de los Elementos de Euclides.

(Ballén, 2012)

La proposición referida a la figura, se traduce algebraicamente en la expresión: $a(b + c + d|) = ab + ac + ad$. Conocida habitualmente como la factorización del factor común.

Proposición 4. Si se corta al azar una línea recta, el cuadrado de la (recta) entera es igual a los cuadrados de los segmentos y dos veces el rectángulo comprendido por los segmentos.

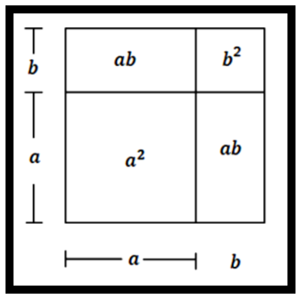


Ilustración 9. Representación geométrica de la Proposición 4 del Libro II de los Elementos de Euclides.

(Ballén, 2012)

Esta proposición al traducirla al lenguaje algebraico es el conocido producto notable $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. Nuevamente es un caso de factorización. (Ballén, 2012)

De esta manera están representadas geométricamente varias proposiciones algebraicas, que conllevan a los inicios del álgebra geométrica y las conversiones del lenguaje natural al geométrico, tema crucial en este trabajo de investigación.

Seguidamente, entra el inicio de la *etapa sincopada*, 600 años después de Euclides con los aportes de Diofanto y su gran obra la *Arithmetica*, en la cual, como los anteriores, se enfoca en la solución de problemas y ecuaciones de la forma $x + y = 0$, y de segundo grado como

$ax^2 + bx =$c, en donde prescinde totalmente de la geometría. Se enfoca en la solución de ecuaciones indeterminadas, que hoy en día se conocen como *"ecuaciones diofánticas",* ya que se refieren a números abstractos.

Su gran aporte es la introducción de un símbolo -una especie de S, el mismo símbolo en todos los problemas- para designar una cantidad desconocida o indeterminada a la que Diofanto denomina *arithmo* (que podría traducirse como "número") (Sessa, 2005) y para expresar potencias, incluso superiores a tres.

En esta etapa vemos como el álgebra geométrica va siendo desplazada por la simbólica, pero no precisamente porque fuera menos importante, sino que se buscaba implementar métodos más rápidos para resolver situaciones algebraicas.

El álgebra en la India tuvo características relevantes en el uso de símbolos (por ejemplo, el punto para el cero o para incógnitas, una tilde sobre el sustraendo indicaba sustracción, colores para las diferentes incógnitas) y las letras del alfabeto también para incógnitas, con representantes como Aryabhata I (476 d.C), quien en un libro que se titula *Aryabhatiya*, da una descripción del conocimiento científico de la época, el cual incluye un sistema de notación numérico-alfabético, reglas de operaciones en aritmética y procedimientos para resolver ecuaciones simples y cuadráticas, al igual que ecuaciones indeterminadas de grado uno. (A. Ruiz, 2003)

En la cultura árabe encontramos como uno de sus mayores aportes el nombre del *álgebra,* la cual proviene del libro *Al-jabr w´al muqäbala* escrito en el año 830 por el astrónomo matemático

Mohammed ibn Musa al-Khwarizmi (825 d.C. aprox.). La palabra *Al-jabr significa “restauración”*, restaurar el equilibrio en una ecuación al colocar en un miembro de la misma un término que ha sido eliminado del otro. *Al muqäbala* significa “simplificación”.(Kline, 1972).

Igual que en las anteriores culturas, Khwarizmi y los demás matemáticos árabes ofrecieron todo tipo de procedimientos y soluciones a ecuaciones del tipo:

$bx = ax^2$; $bx = c$; $ax^2 = c$; $ax^2 + bx = c$; $bx + c = ax^2$; $ax^2 + c = bx$.

Con *a, b, c,* números enteros positivos, y métodos como normalmente se llama, “completar cuadrados”.

Aunado a esto explican o justifican sus procesos geométricamente. Es decir, vuelve a resurgir la importancia de la representación geométrica con los árabes.

Así, por ejemplo, para resolver la ecuación $x^2 + 10x = 39$, realizaban el siguiente razonamiento geométrico:

“Sea AB el segmento que representa el valor de la incógnita *x* y construyamos el cuadrado ABCD. Prologuemos DA hasta H y DC hasta F de manera que AH=Cf= *5*, que es la mitad del coeficiente de *x*. Completemos el cuadrado sobre DH y DF. Entonces, las áreas I, II y III son x^2, *5x* y *5x* respectivamente. La suma de las tres es el primer miembro de la ecuación. Añadimos ahora a ambos miembros el área IV, que es 25. Luego, el cuadrado completo tiene área 39+25 ó 64 y su lado debe valer 8. Así pues, AB o AD es 8-5 ó 3. Este es el valor de *x*”. (Kline, 1992 p.262)

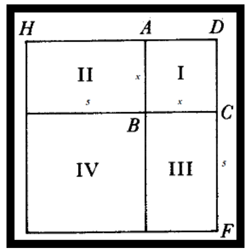


Ilustración 10. Solución geométrica de Al-Khwarizmi. (Kline, 1972)

De esta manera vemos que el álgebra geométrica seguía siendo herramienta importante para la comprensión y solución de problemas de ecuaciones de tipo cuadrático.

Finalizado el siglo XV, el francés François Viéte (1540 -1603) introdujo la utilización de letras para expresar en forma general los datos de un problema, eligiendo vocales para las incógnitas y consonantes para las constantes o valores conocidos; dando inicio a la etapa *simbólica.*

A su tratado sobre ecuaciones le da el nombre de *"análisis",* donde inicia suponiendo el valor de la incógnita y establece una relación de igualdad a partir de expresar de dos maneras distintas una misma cantidad que involucre la incógnita y a partir de allí calcular su valor. Luego viene la comprobación y la interpretación geométrica que seguía haciendo parte de la validación a los procedimientos de cálculo (Sessa, 2005 p.60).

Vemos pues que aparece nuevamente el álgebra geométrica como herramienta fundamental para la comprobación e interpretación de los procedimientos algebraicos.

Continuando con esta evolución del álgebra, aparece René Descartes (1596-1650) quien hace un estudio exhaustivo de las ecuaciones y a partir de la idea de que si *a* es una raíz de una ecuación, $x–a$ divide al polinomio correspondiente, explora el número de raíces de las ecuaciones, y en su obra *La Geometrie (1637)* explica el método por medio del cual transforma estas expresiones algebraicas reduciéndolas a una forma canónica (trabajo que inició tiempo atrás Al-Khwarizmi con la postulación de los 6 tipos de ecuaciones), la cual presenta desglosada de la siguiente manera:

$$x^n = a_{n-1}x^{n-1} \pm a_{n-2}x^{n-2} \pm \ldots \pm a_2x^2 \pm a_1x \pm a_0$$

y posteriormente: (Puig, 2003), así :

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0.$$

Vemos claramente como surgen los primeros planteamientos sobre el Teorema Fundamental del Álgebra. Igualmente y siendo uno de sus aportes más importantes, es el manejo del método cartesiano, que según (Puig, 2003 p. 1) es el método algebraico por excelencia y que puede considerarse como el canon de los métodos que se enseñan tradicionalmente en los sistemas escolares. La estrategia consiste en representar los objetos geométricos a través de objetos numéricos (geometría coordenada): los puntos se identifican con pares de números y las rectas con conjuntos de pares que verifican una cierta ecuación (Sessa, 2005).

Y es aquí donde hay una ruptura total con la geometría como herramienta del álgebra, ya que lo que para Viéte y sus antecesores era un área, para Descartes es simplemente un *número* (A. Ruiz, 2003), y por el contrario invierte la situación usando el álgebra en la solución de problemas geométricos; el principio de homogeneidad, presente hasta ese momento, pierde vigencia con el método de Descartes, al considerar en una misma unidad todas las potencias de una ecuación.

Así mismo Pierre de Fermat (1601- 1665), quien simultáneamente también hacía estudios sobre las curvas por métodos cartesianos decía: “Siempre que en una ecuación final aparezcan dos cantidades incógnitas, tenemos un lugar geométrico, al describir el extremo de una de ellas una línea, recta o curva" (Ruiz, 1990 p. 260).

Es por esto que los historiadores han nombrado a Descartes y a Fermat como los padres del Álgebra ya que con sus métodos generales en el estudio de las curvas dan origen a la teoría de la geometría analítica que se utilizó posteriormente en aplicaciones de la física y la astronomía y con ello el inicio (siglo XVIII) de otra etapa en la evolución del álgebra, es decir, el Álgebra Abstracta o Moderna en donde la influencia de la geometría, como registro de representación, ya no es un herramienta fundamental (Katz & Barton, 2007a)

Para concluir esta parte de la historia, se pretende enfatizar en la importancia que tuvo la geometría en el razonamiento algebraico, motivo que alienta esta investigación a determinar la influencia que tiene este registro en la comprensión del álgebra como un recurso didáctico que tiene su sustento en la historia y la forma en que ha evolucionado.

De la misma manera, se ponen a prueba los cuestionamientos que hace Katz (2007) acerca de si el estudio algebraico debería comenzar usando figuras geométricas ya que son objetos más concretos que los que normalmente utilizamos en álgebra (los cuadrados y los rectángulos son representaciones de productos); son planteamientos que se esperan validar de alguna manera en esta investigación.

2.2.3. Teoría de Polinomios.

Dado que el objetivo de esta investigación es la implementación de secuencias didácticas que permitan potenciar la comprensión de la factorización de polinomios, es importante tener claridad sobre algunos conceptos básicos que se utilizaran sobre polinomios y sus operaciones.

Como se mencionó en la historia del álgebra, con el estudio de las ecuaciones de al-Khwarizmi y posteriormente generalizadas por Descartes, un polinomio es una expresión algebraica en términos de la variable x con coeficientes en el anillo A[2], expresada de la forma:

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} \ldots + a_1 x + a_0$$

Ecuación 1. Expresión formal de un polinomio.

Donde $a_{n,} a_{n-1,\ldots,} a_0$ son números reales llamados coeficientes; de lo cual se desprende que a_n es el coeficiente principal y a_0 es el término independiente, *x* cumple la función de ser la variable, también conocida con el nombre de indeterminada. Es importante tener en cuenta que para la presente investigación, los coeficientes de los polinomios que se trabajarán en las actividades con los estudiantes son valores enteros, lo que resulta ser lo más apropiado cuando se trata de lograr una mayor comprensión de la estructura y procedimientos de un polinomio.

---

[2] Un anillo es un conjunto A donde están definidas dos operaciones $+ : A \times A \to A$; $\cdot : A \times A \to A$ de modo que se verifiquen las propiedades: Asociativa y conmutativa de la suma, existencia de neutro para la suma, existencia de inverso aditivo, asociativa del producto, elemento neutro del producto y distributiva.(De Nápoli, 2014)

Los exponentes *n*, *n-1*,…, 2, 1,0, son números naturales; *n* es el grado del Polinomio y se indica de la siguiente manera: *grP*(*x*) = *n,* cuando se refiere al grado del polinomio.

2.2.3.1.Funciones polinómicas.

Los polinomios tienen asociada una función polinómica denominada f con dominio y codominio en *R,* definida por la fórmula:(Universidad Nacional de San Juan, n.d.)

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} \ldots + a_1 x + a_0$$

Ecuación 2. Expresión general de una función polinómica.

2.2.3.2. Valor numérico de un polinomio

Al proceder en el remplazo de la *x por un valor k* en el polinomio *P*(*x*) se obtiene un valor llamado valor numérico, así:(Universidad Nacional de San Juan, n.d.)

Si $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} \ldots + a_1 x + a_0$ entonces el valor de P(x) en $x = k$ es $P(k) = a_n k^n + a_{n-1} k^{n-1} \ldots + a_1 k + a_0$.

2.2.3.3.Operaciones con polinomios[3]

Dado un anillo A, sea A[x] el conjunto de todos los polinomios con coeficientes en A. Sean

[3] Tomado de http://www.ugr.es/~jesusgm/Curso%202005-2006/Matematica%20Discreta/Polinomios.pdf

$p(x) = a_m x^m + \cdots + a_1 x + a_0$ y $q(x) = b_n x^n + \cdots + b_1 x + b_0$ dos elementos de A[x], y supongamos que m ≤ n.

1. Se define la suma de los polinomios p(x) y q(x) como el polinomio

$$p(x) + q(x) = b_n x^n + \cdots + b_{m+1} x_{m+1} + (a_m + b_m) x^m + \cdots + (a_1 + b_1) x + (a_0 + b_0)$$

Ejemplo:

Dados $P(x) = 3x^3 - 5x^2 + 7 \quad y \quad Q(x) = 2\,x^3 + 8x^2 - 4x\,, calcular\; P(x) + Q(x)$

$P(x) + Q(X) = (3x^3 + 2\,x^3) + (-5x^2 + 8x^2) - 4x + 7$

$P(x) + Q(x) = 5x^3 + 3x^2 - 4x + 7$

2. Sea $k \in N, p(x) = a_m x^m + \cdots + a_1 x + a_0;\ q(x) = b_k x^k \in A[x]$, (si k = 0 entonces $q(x) = b_0$). Se define el producto de p(x) y q(x) como el polinomio:

   $$p(x) \cdot q(x) = a_n b_k x^{k+n} + \cdots + a_1 b_k x^{k+1} + a_0 b_k x^k \ .$$

   Sean ahora, $p(x) = a_m x^m + \cdots + a_1 x + a_0$ y $q(x) = b_n x^n + \cdots + b_1 x + b_0$. Se define el producto de p(x) y q(x) como

   $$p(x) \cdot q(x) = p(x) \cdot q_n(x) + \cdots + p(x) \cdot q_1(x) + p(x) \cdot q_0(x)$$

   $donde\; q_k(x) = b_k x^k$.

Ejemplo 1:

Dados $P(x) = x^2 + 2x - 1 \qquad y \;\; Q(x) = 2x$

$P(x) \cdot Q(x) = x^2 \cdot 2x + 2x \cdot 2x - 1 \cdot 2x$

$P(x) \cdot Q(x) = 2x^3 + 4x^2 - 2x$

3. Sea K un cuerpo[4], y p(x), q(x) dos polinomios de K[x], con $q(x) \neq 0$. Entonces existen únicos polinomios $c(x), r(x) \in K[x]$ tales que:

   $p(x) = q(x) \cdot c(x) + r(x)$.

$r(x) = 0$ ó $gr(r(x)) < gr(q(x))$. Donde $c(x)$ es llamado cociente y $r(x)$ el resto.

Por lo tanto se puede decir que K es un dominio euclídeo, ya que viene a ser un anillo en el que tenemos definida una división con resto.

Una manera sencilla de hallar el resto en una división sin realizar el algoritmo y saber si q(x) es divisor de p(x) es aplicando el Teorema del resto, donde se define que si $p(x) \in A[x]$; $a \in A$, entonces el resto de dividir p(x) entre $q(x) = x - a$, es el resultado de evaluar p(x) en el punto a;

$p(a) = (a - a) \cdot c(a) + r(x)$.

$p(a) = r$.

Si $p(a) = 0$, entonces, $q(x) = x - a$ es divisor de $p(x)$, o a es una raíz del polinomio (teorema del factor).

Ejemplo: $x = -3$ es raíz de $P(x) = x^2 + 6x + 9$ porque $P(-3) = (-3)^2 + 6(-3) + 9 = 0$. Por lo tanto $(x + 3)$ es divisior del $P(x)$.

---

[4] Un cuerpo es un anillo conmutativo en el que cada elemento no nulo tiene un inverso para el producto. Dicho de otra forma, es un conjunto en el que podemos sumar, restar, multiplicar y dividir (salvo por 0). Ejemplos de cuerpos son Q, R, C o Zp, donde p es un número primo.(Tomado de : http://www.ugr.es/~jesusgm/Curso%202005-2006/Matematica%20Discreta/Polinomios.pdf)

Si en un cuerpo K, en el cual $p(x)$, $q(x) \in K[x]$, y hay un $d(x) \in K[x]$ el cual es un máximo común divisor de $p(x)$ y $q(x)$ entonces:

1. $d(x)$ es divisor de $p(x)$ y $q(x)$.
2. Si $c(x)$ es divisior de $p(x)$ y $q(x)$ entonces $c(x)$ es divisor de $d(x)$.

De acuerdo con el teorema de Bezout, el máximo común divisor de dos polinomios es no vacío ya que si $d(x) \in mcd\big(p(x), q(x)\big)$ entonces existen otros dos polinomios $u(x), v(x) \in K[x]$ tal que: $d(x) = u(x)p(x) + v(x)q(x)$. De la misma manera, existe un único $d(x)$ mónico que pertenece al $mcd\ (p(x), q(x))$.

2.2.4. Teorema Fundamental del Álgebra

El Teorema fundamental del álgebra establece que cualquier polinomio no constante sobre los complejos debe tener por lo menos una raíz compleja.

Es decir, un polinomio sobre un cuerpo $K[x]$ tiene la forma

$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} \ldots + a_1 x + a_0$

Donde $a_{0,} a_1, \ldots, a_n$ están en K(x) y n es un número natural. Una raíz de este polinomio es un elemento de un cuerpo extensión de K(x) o del mismo K(x), que hace cero dicho polinomio.

De acuerdo con Gauss, a quien se le atribuyó haber probado este hecho, empleó el siguiente método para su demostración:

"*Sea* $f(z) = u(z) + iv(z)$ *un polinomio no constante en* $\mathbb{C}\,[z]$. *El complejo ω es raíz de f(z), si y sólo si,* $u(\omega) = 0$ *y* $v(\omega) = 0$. *Esto es, el polinomio f(z) tiene raíces complejas, si y sólo si, las curvas representadas por las ecuaciones u(z)=0 y v(z)=0, se cortan. Mediante un estudio cualitativo de estas curvas, prueba que una de las dos contiene un arco que tiene a su vez puntos ubicados en ambas regiones en que queda dividido el plano por la otra curva. De esto se infiere que las dos curvas se cortan*" (Salazar Cruz, 2009, p.6)

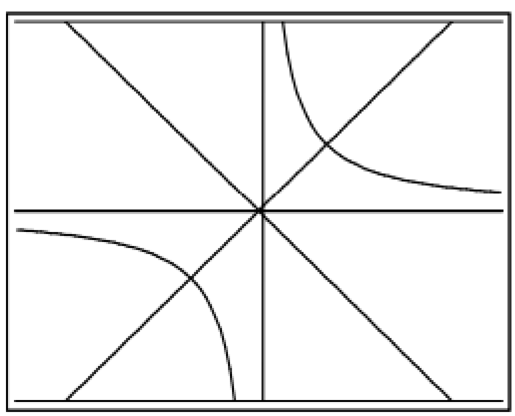


Ilustración 11. Demostración geométrica TFA, Gauss (Mir Sabaté, 2005)

Demostración[5]. Sea $p(z) = a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} \ldots + a_1 z + a_0$ un polinomio de grado $n \geq 1$ con coeficientes complejos. Realizando un razonamiento por reducción al absurdo, tenemos:

Supongamos que $p(z)$ no tiene raíces complejas, es decir, $p(z) \neq 0$ para todo $z \in \mathbb{C}$. La función $f(z) = \frac{1}{p(z)}$ es entera por ser un cociente de dos funciones enteras cuyo denominador nunca se anula. Tenemos

$|p(z)| \geq |a_n| \cdot |z|^n - (|a_{n-1}| \cdot |z|^{n-1} + \cdots + |a_1| \cdot |z| + |a_0|)$, y por lo tanto

$$\frac{|p(z)|}{|z|^n} \geq |a_n| - \left(\frac{|a_{n-1}|}{|z|} + \cdots + \frac{|a_1|}{|z|^{n-1}} + \frac{|a_0|}{|z|^n}\right)$$

Luego, $\lim_{|z|\to\infty}\left(\frac{|a_{n-1}|}{|z|} + \cdots + \frac{|a_1|}{|z|^{n-1}} + \frac{|a_0|}{|z|^n}\right) = 0$, y por lo tanto existe $r > 0$ tal que si $|z| \geq r$ entonces

$\frac{|a_{n-1}|}{|z|} + \cdots + \frac{|a_1|}{|z|^{n-1}} + \frac{|a_0|}{|z|^n} \leq \frac{|a_n|}{2}$. Resumiendo, si $|z| \geq r$ entonces

$$\frac{|p(z)|}{|z|^n} \geq \frac{|a_n|}{2}$$

A continuación observamos que la función $f(z)$ es continua y por lo tanto está acotada en el disco $\overline{D}(0,r)$, es decir, existe $C > 0$ tal que $|f(z)| \leq C$ para todo $z \in \mathbb{C}$ con $|z| \geq r$. Además, si$|z| \geq r$ entonces $f(z) \leq \frac{2r^n}{|a_n|}$. Las dos últimas estimaciones nos permiten deducir que f es

[5] Tomado de: https://cafematematico.wordpress.com/2011/05/25/el-teorema-fundamental-del-algebra/

una función entera y acotada. Y por el teorema de Liouville, se concluye que $f(z)$ es constante, generando una contradicción.

2.2.5. Factorización de polinomios.

Según el teorema de factorización Única de Bezout, para cada $P \in \mathbb{K}[x]$, existe una única representación de la forma $P(x) = rP_1(x)P_2(x) \ldots\ldots P_k(x)$, donde $r \in \mathbb{K}$, y $P_j \in \mathbb{K}[x]$ es un polinomio mónico irreducible sobre $\mathbb{K}$ para $j = 1,2, \ldots, k$. (C. Ruiz, n.d.)

De la misma manera el teorema de la factorización completa expone que si $f(x)$ es un polinomio de grado $n \geq 1$, entonces existen n números complejos $z_1, z_2, \ldots, z_n$ tales que $f(x) = a(x - z_1)(x - z_2) \cdots (x - z_n)$, donde a es el coeficiente principal de $f(x)$, cada número z_k es un cero de $f(x)$ y cada uno de estos ceros puede repetirse, es decir, si cada cero de multiplicidad m se cuenta m veces, entonces $f(x)$ tiene precisamente n ceros.

2.2.5.1. Factorización de un polinomio por medio de sus raíces.

A nivel escolar, para hallar las raíces de un polinomio se orientan los siguientes métodos.

2.2.5.1.1. Polinomios de grado uno.

Es importante recordar que los polinomios de grado uno tienen una única raíz lo cual se expresa de la siguiente manera $P(x) = ax + b$, se plantea la ecuación $ax + b = 0$ de la cual se obtiene $x = -\frac{b}{a}$. (Universidad Nacional de San Juan, n.d.)

2.2.5.1.2. Polinomios de grado dos

Para determinar las dos raíces $x_1\ y\ x_2$ de un polinomio de grado dos, es decir de un polinomio de la forma $P(x) = ax^2 + bx + c$ se resuelve la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$ Si es reducible en $\mathbb{Z}$ debe ser de forma $ax^2 + bx + c = (px + q)(rx + t)$ donde $p, q, r\ y\ t$ son enteros. Se deduce entonces que: $pr = a$, $qt = c$, $pt + qr = b$. (Ballén, 2012)

Igualmente, se puede realizar aplicando la fórmula general para polinomios cuadráticos:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Ecuación 3. Ecuación general para polinomios cuadráticos.

2.2.5.1.3. Polinomios de grado mayor o igual que tres

Como una propiedad inmanente, una raíz entera de un polinomio es un divisor de su término independiente, por lo tanto se deben hallar dichos divisores y se evalúan en el polinomio para encontrar cuál es raíz. Posteriormente, se divide el polinomio por el polinomio factor y se aplican seguidamente los métodos anteriormente enunciados.(Universidad Nacional de San Juan, n.d.)

Ejemplo: Determinar las raíces de $P(x) = 2x^3 + 3x^2 - 8x + 3$

- Se hallan los divisores del término independiente 3: {-1,1,-3,3}.

- Se prueba cuáles de esos divisores son raíces de $P(x)$.

$P(-1) = 2(-1)^3 + 3(-1)^2 - 8(-1) + 3 = 12 \neq 0$, por lo tanto -1 no es raíz de $P(x)$.

$P(1) = 2(1)^3 + 3(1)^2 - 8(1) + 3 = 0$, por lo tanto $x_1 = 1$ es raíz de $P(x)$.

Luego P(x) es divisible por x- 1. Aplicando la Regla de Ruffini[6] se obtiene:

$$2x^3 + 3x^2 - 8x + 3 = (x - 1)(2x^2 + 5x - 3)$$

Luego aplicando la fórmula general en el segundo factor, tenemos:

$$2x^3 - x^2 - 7x + 6 = (x - 1)(x + 3)\left(x - \frac{1}{2}\right)$$

2.2.6. Utilidad de los polinomios[7]

Es conveniente resaltar la importancia que tiene la comprensión del uso de los polinomios y de sus raíces pues como vimos en la historia del álgebra, surgen en la solución de problemas reales. Como lo menciona el investigador, **Jared Aurentz (**Instituto de Ciencias Matemáticas**),** los polinomios se aplican en numerosos campos de las ciencias, tanto, que muchos investigadores en todo el mundo trabajan en su cómputo.

[6] Descrita por Paolo Ruffini en 1809, es un caso especial de «división sintética» (una división de polinomios en donde el divisor es un «factor lineal»). https://es.wikipedia.org/wiki/Regla_de_Ruffini
[7] Tomado de: https://elpais.com/elpais/2017/09/22/ciencia/1506069453_894253.html

Las raíces de los polinomios se pueden encontrar en las notas o sonidos que producen la vibración de una cuerda a determinada frecuencia, esta frecuencia es un número que corresponde a la raíz de un polinomio que se define a partir de las características de la cuerda.

Estas vibraciones son llamadas ondas mecánicas que a parte de emitir una nota, se produce un efecto llamado resonancia, que puede llegar a ser destructivo, para lo cual, en el caso de los terremotos, los ingenieros diseñan estructuras especiales para que sus notas de resonancia no afecten la estructura de las edificaciones.

Estas resonancias igualmente suceden a nivel molecular, en mecánica cuántica, como es el caso de las resonancias del efecto Stark en el átomo de hidrógeno, cuya ecuación de movimiento es:

$$Z_{n_1}^{m}(-2E\lambda^2, F\lambda^3) + Z_{n_2}^{m}(-2E\lambda^2, -F\lambda^3) = 4\lambda$$

Y todas sus soluciones, es decir, sus raíces son resonancias. (Garcia, 2017)

Otra aplicación muy común de los polinomios es la optimización. Esta técnica matemática permite usar de forma eficiente recursos escasos como el tiempo, la energía o el dinero, siguiendo determinados objetivos. Las estrategias óptimas se corresponden habitualmente con las raíces de las ecuaciones que las modelan.

En la actualidad, el matemático canadiense Robert Langlands, profesor emérito en el Instituto de Estudios Avanzados de Princeton, donde ocupa el mismo despacho que usó Albert Einstein, fue ganador del premio Abel en 2016 por su por su visionario programa, que conecta la teoría de representaciones con la teoría de números, el cual traza conexiones entre dos ámbitos de las matemáticas que antes se pensaba que no tenían nada que ver el uno con el otro: el análisis armónico y la teoría de números.

El análisis armónico estudia los fenómenos periódicos, como las ondas, descomponiéndolos en pequeñas funciones fáciles de manipular.

Según Óscar García-Prada[8], investigador el Instituto de Ciencias Matemáticas (ICMAT), afirma que ya que las matemáticas del análisis armónico son más fáciles de comprender por su naturaleza ordenada, pueden ser de gran ayuda para entender la teoría de números. Además, en los últimos años se ha descubierto que los paralelismos se extienden incluso a otra área de las matemáticas, la geometría. "Son tres mundos muy diferentes, cada uno con sus características. Pero gracias a estas correspondencias podemos deducir que, si hay ciertas cosas en el primero, tiene que haberlas también en el segundo y en el tercero",

El mismo tipo de paralelismos se han observado también en física teórica, en un fenómeno que se conoce como dualidad S, y que consiste en relaciones de simetría entre distintas propiedades físicas. Por ejemplo, se produce entre el campo magnético y el campo eléctrico, "En un futuro, dentro de algunas décadas, la teoría de Langlands podría tener aplicaciones en la encriptación de información, por ejemplo, para las compras a través de internet", hipotetiza García-Prada. Sería un sistema más complejo que el que se usa en la actualidad y, por lo tanto, más difícil de hackear, según el investigador.

[8] Tomado de: http://www.lavanguardia.com/ciencia/20180320/441738935611/premio-abel-matematicas-robert-langlands-papelera.html

2.2.7. La Caja de Polinomios.

La Caja de Polinomios es una herramienta didáctica creada por el grupo de investigación GESCAS de la Universidad de Nariño, el cual está fundamentado en la teoría de cuatro matemáticos famosos: Euclides con su teoría del álgebra geométrica en su obra *Elementos*; Tabit ben Qurra el Harani con su concepto de homogenización que permite tratar a los polinomios a través del manejo de las áreas de rectángulos, atendiendo a las dimensiones de la base y de la altura, Pierre Fermat y Renato Descartes con el plano cartesiano, quienes logran crear un material concreto que potencia en el estudiante la visualización del álgebra en diferentes registros de representación como lo son el registro geométrico y algebraico (Soto, Mosquera, & Gómez, 2005).

2.2.7.1.Fichas.

Las primeras fichas son de tres tipos diferentes: cuadrado grande, rectángulo y cuadrado pequeño.

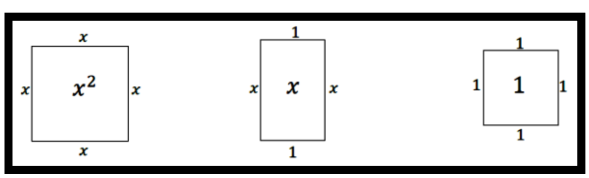


Ilustración 12. Fichas Caja de Polinomios.

Las fichas se relacionan justamente porque las dimensiones del rectángulo coinciden exactamente con las dimensiones de las otras dos, lo cual permite que las tres fichas se unan por lados correspondientes de manera precisa, formando una figura como la siguiente:

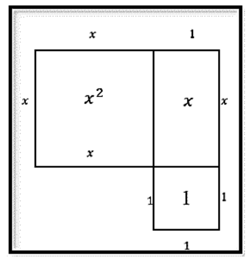


Ilustración 13. Ejemplo del tratamiento con las fichas de la Caja de Polinomios.

2.2.7.2.Tablero.

El tablero corresponde a una región rectangular que emula al plano cartesiano, sus cuadrantes permiten escribir cualquier polinomio, para ello, recordemos que el plano está dividido en cuatro cuadrantes, así:

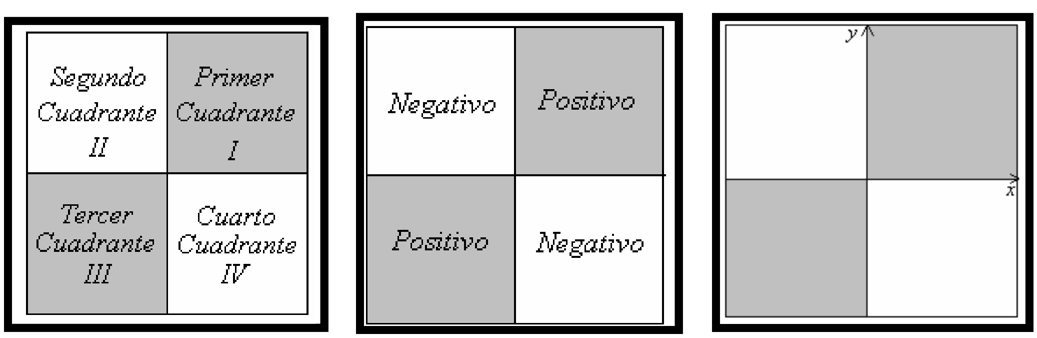


Ilustración 14. Tablero de la Caja de Polinomios.

Para realizar la operatoria algebraica, es decir el tratamiento en el registro geométrico, es necesario tener en cuenta las dimensiones, la ubicación y el valor algebraico de las fichas, el cual corresponde al producto de las longitudes de sus lados, de acuerdo con la disposición de ésta en el plano. La gráfica explica estos hechos:

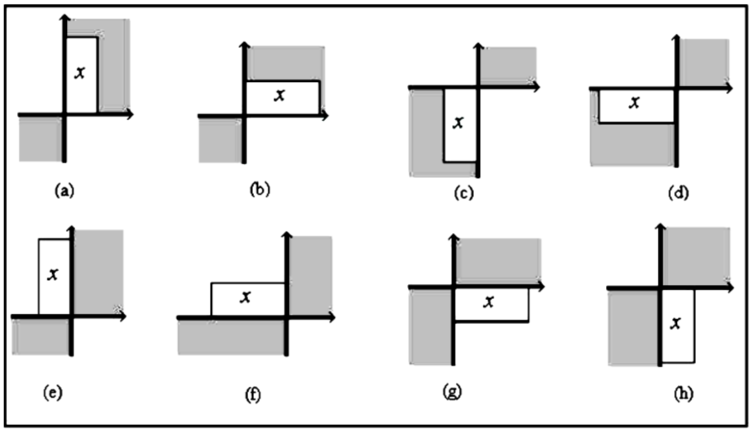


Ilustración 15. Tratamiento de una ficha en el tablero con la Caja de Polinomios.

En la lectura de las dimensiones de una ficha se conviene en tomar la dimensión de la base en el eje x y luego la dimensión de su altura por el eje y.

Así, las figuras (a); (b); (c) y (d) corresponden a fichas de valor algebraico x las cuales se han dispuesto con dimensiones 1 y x, x y 1, -1 y -x, -x y -1, respectivamente. Las figuras (e); (f); (g) y (h) corresponden a fichas de valor algebraico -x la cuales se han dispuesto con dimensiones -1 y x, -x y 1, x y -1, 1 y -x, respectivamente.

2.2.7.3. Factorización de polinomios de segundo grado.

Factorizar un polinomio utilizando la Caja de Polinomios equivale a disponer una representación rectangular del mismo, siempre que esto sea posible. Para realizar esta tarea a veces es necesario agregar *ceros*; es decir, de parejas de fichas del mismo rótulo que ubicadas en cuadrantes de distinto color equivalen algebraicamente a cero. Para este efecto, se requiere disponer el menor número de fichas que representan al polinomio en cuestión, en un encuadre minimal viable.

Un *encuadre minimal*, es aquella disposición de un polinomio p(x) de forma que su completación a rectángulo requiere del menor número de fichas. En la siguiente gráfica se representan tres encuadres del polinomio $p(x) = x^2 - x - 2$; de los cuales el tercero corresponde a un encuadre minimal:

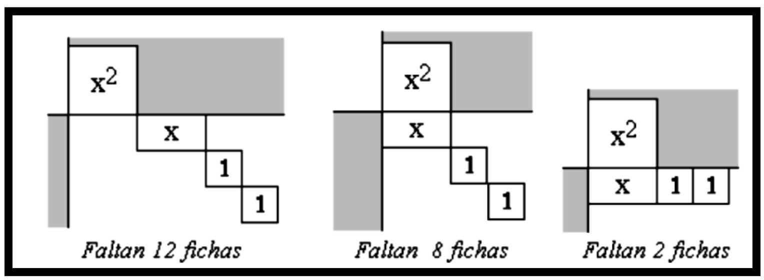


Ilustración 16. Ejemplos de encuadre minimal del polinomio $x^2 - x - 2$.

Un *encuadre minimal viable* es aquel encuadre que requiere de un número par de fichas que equivalen algebraicamente a cero y que completan el rectángulo que representa al polinomio p (x). En la siguiente gráfica se representan dos encuadres minimales de el $p(x) = x^2 - x - 2$, el segundo de los cuales es *viable*, pues requiere de dos fichas *x* para completar el rectángulo, pero algebraicamente, la agregación de estas fichas equivale a sumar cero.

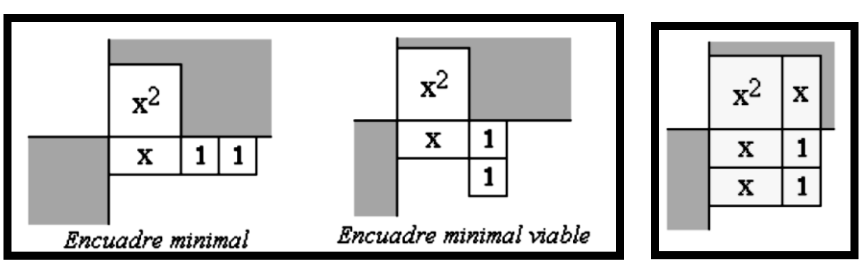


Ilustración 17. Encuadre minimal viable y su completación

Al completar el rectángulo que representa al polinomio p(x) a partir de un encuadre minimal viable, se ha factorizado; su factorización es el producto de las dimensiones de dos lados consecutivos del rectángulo. Por ejemplo, a partir de la disposición minimal viable que representa a $p(x) = x^2 - x - 2$ las dimensiones de dos lados consecutivos de este rectángulo $x + 1 \ y \ x - 2$ se consigue que $p(x) = x^2 - x - 2 = (x + 1)(x - 2)$.

Es posible representar lo ejecutado con el rompecabezas de manera simbólica, observando que se ha adicionado un cero constituido por fichas *x*. Por esta razón se escribe:

$x^2 - x - 2 = x^2 - (x - x) - x - 2 = x^2 + x - x - 1 - x - 1$

$= x(x + 1) - (x + 1) - (x + 1) = (x + 1)(x - 2)$

Un polinomio p (x) se llama *completo*, cuando el proceso de factorización no requiere de agregar ceros; de hecho, existe una infinidad de polinomios completos como

$p(x) = x^2 - 3x + 2$ Cuya representación rectangular se indica en la siguiente gráfica:

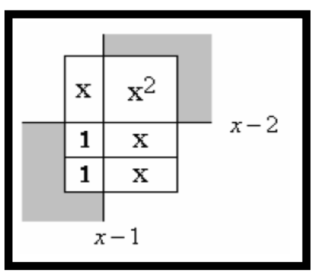


Ilustración 18. Encuadre minimal viable de un polinomio completo.

El dibujo indica claramente la factorización: $p(x) = x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2)$

Capítulo III

Diseño Metodológico.

3.1. Tipo de Estudio.

La presente investigación es de tipo cualitativa interpretativa ya que busca analizar la realidad social de los estudiantes a través de datos textuales y detallados, por medio de la interactividad de la población en estudio con el investigador quien tiene como función interpretar, comprender y transformar las percepciones, creencias y significados que tienen los estudiantes acerca de las operaciones algebraicas y en especial de la factorización de polinomios a través de diferentes fuentes de información, como su propia perspectiva, por medio de videos y/o grabaciones, entrevistas o instrumentos escritos, (Bisquerra A., 2004).

Este trabajo tiene como objetivo principal potenciar la comprensión de la factorización de polinomios por medio del manejo de varios registros de representación usando el álgebra geométrica en el marco de los registros de representación e implementando como metodología las fases de la teoría de Van Hiele.

De acuerdo con el tipo de investigación, entonces se trata de analizar el aprendizaje de la factorización en el contexto del algebra geométrica, utilizando diferentes registros de representación, entre ellos, lenguaje natural, lenguaje formal o algebraico, lenguaje geométrico, siendo un proceso en cual se le dará énfasis a las actividades cognitivas de formación, tratamiento y conversión, identificando los obstáculos que se presenten con el fin de realizar los ajustes respectivos en la secuencia didáctica.

La población con la cual se trabajó esta investigación son 31 estudiantes con edades promedio entre 14 y 15 años, de grado noveno de la educación básica secundaria, jornada Única, del colegio INEM Felipe Pérez de Pereira.

3.2. Estrategia Metodológica.

Para el desarrollo de este trabajo de investigación se implementaron unas fases similares a las propuestas por los investigadores Van Hiele (1957), articuladas con los Registros de Representación Semiótica (Duval 2004) en el proceso de la semiosis a la noesis, en sus tres actividades cognoscitivas: formación, tratamiento y conversión.

3.2.1. El Modelo Educativo Van Hiele.

Este modelo abarca dos aspectos principales:

Descriptivo: mediante el cual se identifican diferentes formas de razonamiento geométrico de los individuos y se puede valorar el progreso de estos.

Instructivo: marca unas pautas a seguir por los profesores para favorecer el avance de los estudiantes en su nivel de razonamiento geométrico

En sus enunciados más importantes encontramos:

- Se pueden encontrar varios niveles diferentes de perfección en el razonamiento de los estudiantes de matemáticas.
- Un estudiante solo podrá comprender realmente aquellas partes de las matemáticas que el profesor le presente de manera adecuada a su nivel de razonamiento.
- Si una relación matemática no puede ser expresada en el nivel actual de razonamiento de los estudiantes, será necesario esperar a que estos alcancen un nivel de razonamiento superior para presentársela.

Dicho modelo tiene tres componentes principales: en primer lugar, el *insight*, que según Van Hiele se define como "comprensión". En segundo lugar, los niveles de razonamiento se clasifican en cinco: nivel 0, de reconocimiento visual; nivel 1, de análisis; nivel 2, ordenación o clasificación; nivel 3, de deducción formal y nivel 4, de rigor. Por último, las fases de aprendizaje, que son fase 1, información; fase 2, orientación dirigida; fase 3, explicitación; fase 4, libre orientación; fase 5, integración; las fases están orientadas a ayudar a progresar a un alumno desde un nivel de razonamiento al inmediatamente superior, constituyendo un esquema para organizar la enseñanza. (Bedoya, Esteban, & Vasco, 2007)

De esta metodología extraeremos y pondremos en acción lo correspondiente al primer y tercer componente, es decir, el *insight* y las fases de aprendizaje.

Las "fases de aprendizaje" son etapas en la graduación y organización de las actividades que debe realizar un estudiante para adquirir las experiencias que le lleven al nivel superior de razonamiento. Es necesario conseguir, en primer lugar, que los estudiantes adquieran de manera comprensiva los conocimientos básicos necesarios (nuevos conceptos, propiedades, vocabulario, etc.) con los que tendrán que trabajar, para después centrar su actividad en aprender a utilizarlos y combinarlos.

Tomando como referencia dichas fases y los diferentes trabajos enmarcados en la teoría de Duval, se presentan las pautas teóricas que se tuvieron en cuenta para el diseño de experiencias de aprendizaje en cada una de ellas, las cuales conforman la unidad didáctica con relación al concepto de factorización por medio del álgebra geométrica.

Fase 1, Información: aplicación de un diagnóstico y/o actividad que permita detectar la información que los alumnos poseen en su estructura cognitiva frente a la manifestación del concepto de factor, descomposición factorial, perímetro, área, variable, polinomio y factorización de polinomios.

Puesta en común del lenguaje que los alumnos deben tener para cumplir con las condiciones iniciales básicas que se requieren para iniciar el proceso de la semiosis.

Análisis de los datos obtenidos en esta fase y diseño de las experiencias de aprendizaje para la siguiente fase. El objetivo principal es identificar los conocimientos previos de los estudiantes.

Fase 2, Orientación dirigida: recapitulación de los conceptos factor, descomposición factorial, perímetro, área, variable, polinomio y factorización de polinomios. Actividad por medio de la cual el estudiante identifica medidas longitudinales y de área en figuras geométricas rectangulares realizando procedimientos de perímetro y área total en composiciones de figuras geométricas.

Presentación del material concreto "La Caja de Polinomios". Reglas de aplicación, identificación de las fichas, plano cartesiano, ubicación en el plano y todas las generalidades del recurso didáctico, generando de esta manera la formación de un registro de representación geométrica de un polinomio.

Instrucción de las operaciones de suma y multiplicación en el registro geométrico correspondiente al tratamiento, seguidas de actividades prácticas que permitan la interiorización y comprensión de las mismas. Verificación del lenguaje adquirido y el significado dado a las nuevas relaciones válidas que realicen los estudiantes.

Fase 3, Explicitación: recapitulación del proceso realizado, apoyado en herramientas virtuales como software o aplicaciones para factorización de polinomios. Además de instrucción de factorización de polinomios en el registro geométrico.

Actividades que lleven al estudiante a interiorizar la factorización de polinomios, bajo las reglas de aplicación del registro geométrico.

Análisis de actividades propuestas al estudiante donde establezca relaciones entre las representaciones geométricas y el tratamiento algebraico en una factorización. Esta etapa del proceso debe realizarse en forma individual y grupal, dando mayor importancia a los conceptos básicos del trabajo.

Revisión del lenguaje adquirido, como base al tratamiento realizado en el registro geométrico utilizado.

Fase 4, Orientación libre: planteamiento y análisis de problemas de factorización que conlleven a la implementación del mecanismo y a argumentar cuando la solución existe y cuando no.
Se proponen conversiones entre el lenguaje algebraico y lenguaje geométrico, estableciendo relaciones y deduciendo características entre ambos registros.

Revisión y evaluación general del proceso haciendo énfasis en el lenguaje adquirido y el significado que el alumno le da al mismo; las nuevas relaciones válidas construidas y la aplicación del mecanismo en situaciones favorables o desfavorables.

Se deben realizar actividades que inviten al descubrimiento de nuevas situaciones que lleven a la implementación del mecanismo para determinar si un polinomio se puede factorizar con la herramienta utilizada o si por el contrario se requiere de otros métodos para hacerlo.

Como es una fase de evaluación del proceso, si no es superado a satisfacción debe retornar a la fase 2 y revisar cuidadosamente las actividades propuestas en esta y en las fases 3 y 4.

Fase 5, Integración: *a*nálisis de actividades de planteamiento por parte del estudiante de polinomios factorizables y no factorizables en las cuales muestre dominio al pasar de un registro a otro.

Análisis del dominio de varios registros de representación en la factorización de polinomios que validen el proceso de *noesis* en el estudiante con la secuencia didáctica aplicada.

Verificación de la incorporación del lenguaje propio del nuevo nivel y diseño de instrumento que valide las secuencias didácticas en el proceso de comprensión y manejo de dos o más registros de representación en el concepto de la factorización.

En resumen, la articulación entre los objetivos específicos de esta investigación, el marco teórico de las representaciones semióticas de Duval y la metodología de Van Hiele las podemos apreciar en el anexo B.

Capítulo IV

Análisis de Resultados

4.1. Fase 1. Información.

De acuerdo con la metodología planteada, se diseñó un cuestionario de diagnóstico con ocho preguntas, teniendo en cuenta el currículo y los estándares o conocimientos esenciales para un estudiante de grado 8° y 9°, con el cual se pretende analizar las concepciones y nivel de comprensión que tienen sobre diferentes aspectos relacionados con factorización, perímetro, área y volumen. Las preguntas están enfocadas de la siguiente manera y codificadas con la letra mayúscula que aparece al frente como referencia en adelante:

Pregunta 1. Descomposición en factores primos (A)

Pregunta 2. Aplicaciones con factores numéricos (B)

Pregunta 3. Perímetros y Áreas (C)

Pregunta 4. Composición de áreas (D)

Pregunta 5. Potencias (E)

Pregunta 6. Expresiones algebraicas geométricas (F)

Pregunta 7. Factorización de polinomios (G)

Pregunta 8. Polinomios cuadráticos y su representación (H)

Se parte de la hipótesis de que los estudiantes objeto de este estudio ya habían visto estos conceptos en años anteriores.

Para analizar los resultados del diagnóstico se implementa una rúbrica diseñada con puntuaciones entre 1 y 4, así:

1 Deficiente: Se le dificulta resolver.

2 No muy bien: Resuelve con dificultad.

3 Muy bien: Resuelve con poca dificultad.

4 Excelente: Resuelve correctamente.

En la siguiente tabla se registra el promedio obtenido en cada uno de los conceptos.

Tabla 3 . Diagnóstico: Promedio por Conceptos.

CONCEPTOS	A	B	C	D	E	F	G	H
PROMEDIO	3,2	1,8	2,5	1,2	1,9	1,2	1,4	1,3

De acuerdo con la tabla anterior, se destacan sólo dos conceptos con puntuaciones promedio por encima de 2.5, es decir, entre “no muy bien” y” muy bien”, éstos son el A (Descomposición en factores primos) y el C (Perímetros y Áreas).

En el concepto A (Factores primos), la mayoría de los estudiantes presenta facilidad al descomponer un número en sus factores primos pero un 52% omiten expresar el número como el producto de esos factores que encontraron o sus respuestas son incoherentes, como lo vemos en la respuesta del estudiante E6 y E8 en la siguiente imagen.

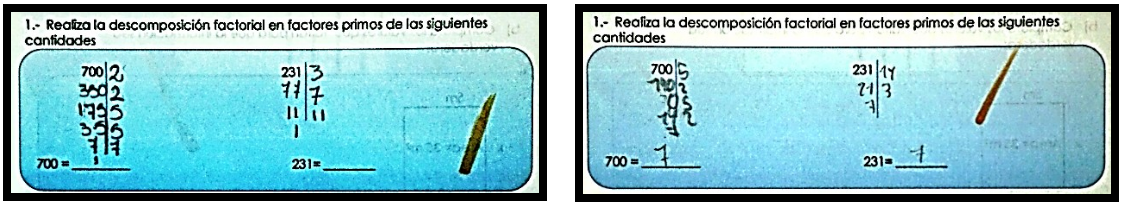


Ilustración 19. Respuestas de los estudiantes E6 y E8. Pregunta 1. Factores primos.

En el concepto C, pregunta 3 (Perímetros y Áreas), la pregunta indica que sin utilizar instrumentos de medición, halle el perímetro y el área de un rectángulo y un triángulo. La intención era que el estudiante utilizara medidas arbitrarias para los diferentes segmentos pero utilizando variables. Al respecto, sólo el estudiante E3, pareció definir las medidas de los lados con variables, pero al realizar las operaciones de perímetro y área se identifica que a la final si asigna un valor numérico a los lados y sus resultados son inconsistentes.

Teniendo en cuenta las medidas numéricas que los estudiantes asignaron a las figuras, el 87% y el 77% aplican en forma correcta la fórmula de perímetro en rectángulos y triángulos, respectivamente, pero sólo el 48% y 45% de ellos tiene en cuenta el uso correcto de las unidades en el resultado. De la misma manera con respecto al área de las figuras, el 71% y 13% aplican en forma correcta la fórmula de área en rectángulos y triángulos, pero solo el 19% y 0% de ellos tienen en cuenta el uso correcto de las unidades en el resultado.

En las siguientes imágenes podemos evidenciar algunas de estas situaciones, además de los errores cometidos.

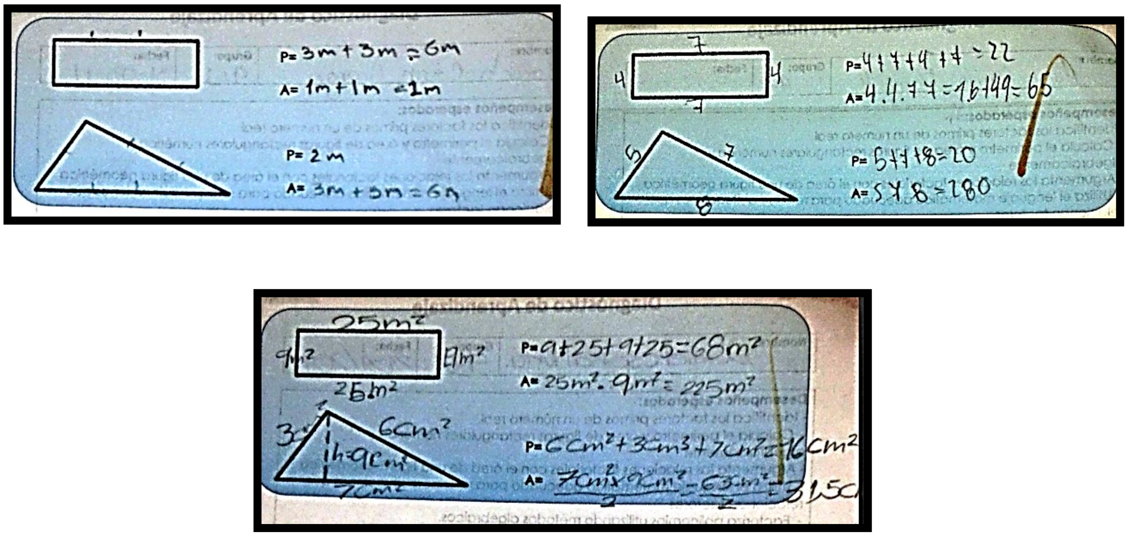


Ilustración 20. Respuestas de estudiantes E6, E8, E15 respectivamente. Pregunta 3. Perímetros y Áreas.

Continuando con el análisis del diagnóstico, en la siguiente tabla se explicita el número de estudiantes en cada escala de valoración por concepto.

Tabla 4. Diagnóstico por Conceptos y escala de valoración.

	Pregunta	CONCEPTOS	ESCALA			
			4. EXCELENTE	3. MUY BIEN	2. NO MUY BIEN	1. DEFICIENTE
A	1	Factores primos	15	8	6	2
B	2	Aplicaciones de factores	3	3	9	16
C	3	Perímetros y áreas	3	12	14	2
D	4	Composición de áreas	1	0	3	27
E	5	Potenciación	1	4	18	8
F	6	Expresiones algebraicas geométricas	0	1	5	25
G	7	Factorización de polinomios	0	1	8	22
H	8	Polinomios cuadráticos y su representación	0	1	7	23

Como vemos en la tabla anterior, la mayoría de estudiantes se ubican en valoraciones entre 1 y 2 en los conceptos de las preguntas 2, 4, 5, 6, 7 y 8, es decir, que no evidencian claridad en los conceptos algebraicos y de factorización de polinomios, resultado que motiva aún más el objetivo de esta investigación respecto a potenciar su comprensión.

La pregunta 2, Aplicaciones con factores numéricos, tiene dos actividades (2a y 2b), en las cuales se busca la interpretación geométrica que el estudiante hace de una descomposición factorial. Se pretende que realice una conversión desde el registro numérico al geométrico en 2D y 3D.

Como se puede apreciar en las siguientes ilustraciones, los estudiantes no relacionan las unidades de medida de área y en especial de volumen con figuras bidimensionales y tridimensionales y en el caso de visualizar una figura tridimensional, no realizan la descomposición de la medida del volumen (D3) en sus unidades figurales D1.

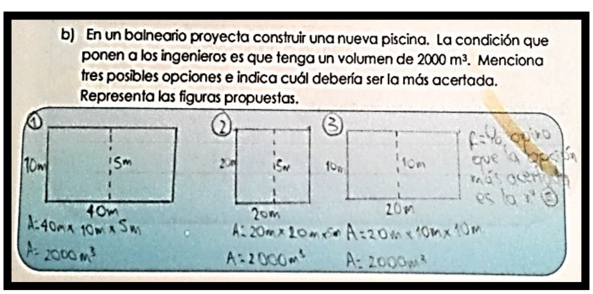


Ilustración 21. Respuesta E20 pregunta 2b.

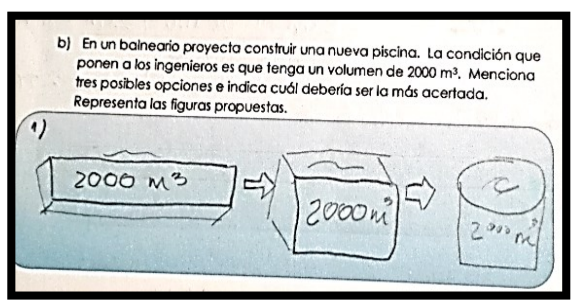


Ilustración. 22 Respuesta E24 pregunta 2b.

En la pregunta 4, Composición de áreas, el estudiante debe realizar operaciones visuales por fraccionamiento y ensamblaje (Marmolejo-Avenia, Guzmán, & Insuaty, 2016), completando la información faltante en la figura. También, se busca que el estudiante relacione el todo y sus partes en una composición de áreas por configuración de las mismas.

El ejercicio propone determinar el área de cada una de las figuras que la componen y de la figura total. El estudiante puede realizar la suma de las áreas de cada figura de partida o aplicar la fórmula de área a la figura total que contiene a las áreas más pequeñas, utilizando la medida de sus lados.

Al respecto, el 74% identifican las medidas que hacen falta, 16% hallan muy bien el área de cada subfigura con sus respectivas unidades de medida, 35% hallan bien el área con dificultades en las unidades de medida. El 94% de los estudiantes usaron la opción de hallar el área total con la medida del cuadrado grande, sólo un estudiante establece la relación de que la suma de las áreas pequeñas equivale al área total de la figura grande.

En las siguientes ilustraciones podemos observar los resultados de algunos estudiantes:

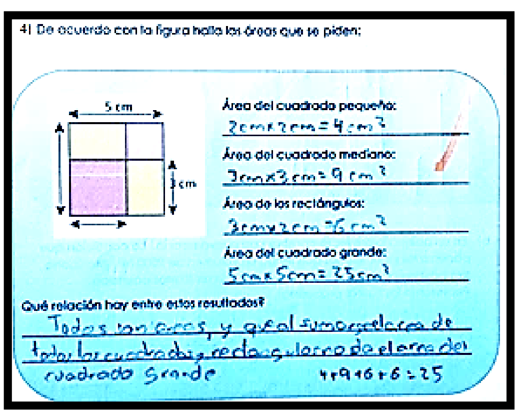


Ilustración 23. Respuesta E10. Actividad 4

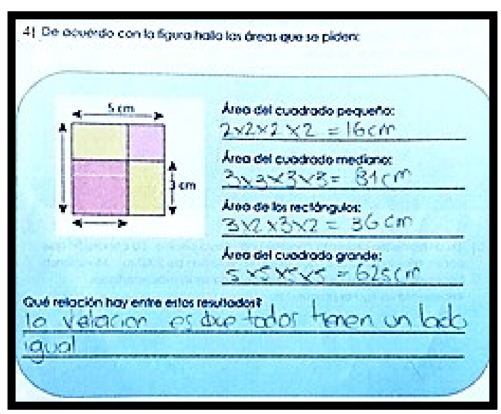


Ilustración 24. Respuesta E21. Actividad 4.

En la pregunta 5, Potencias, se plantean algunas operaciones numéricas y con expresiones algebraicas que contienen potenciación. Al analizar los resultados observamos que la mayoría de los estudiantes tienen dificultades en el tratamiento con el registro algebraico, confunden las propiedades de la potenciación en expresiones algebraicas.

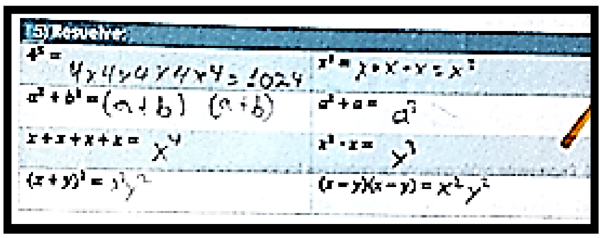


Ilustración 25. Respuesta E12. Actividad 5.

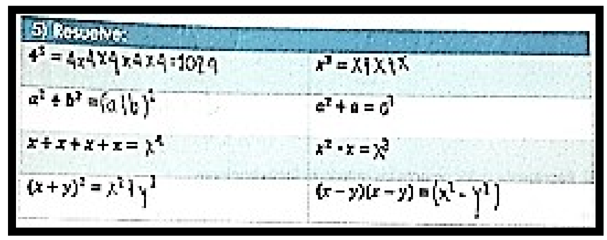


Ilustración 26. Respuesta E9. Actividad 5.

En la pregunta 6, Expresiones algebraicas geométricas, el estudiante debe realizar conversiones del registro geométrico al registro algebraico, a partir de unidades figurales D1 y D2 en la figura de salida para ser configuradas en unidades del registro algebraico.

La mayoría de los estudiantes no percibe la variable como unidad de medida, sienten la necesidad de particularizar dado que no comprenden su significado, (Ruano et al., 2008) y recurren a darle un valor debido a que es un proceso aritmético al cual están acostumbrados. Igualmente, se evidencia que los pocos que intentan realizar esta conversión presentan errores en el tratamiento algebraico, tales como la necesidad de clausura, uso incorrecto de las propiedades de potenciación o no contestar la pregunta como lo podemos apreciar en las siguientes respuestas.

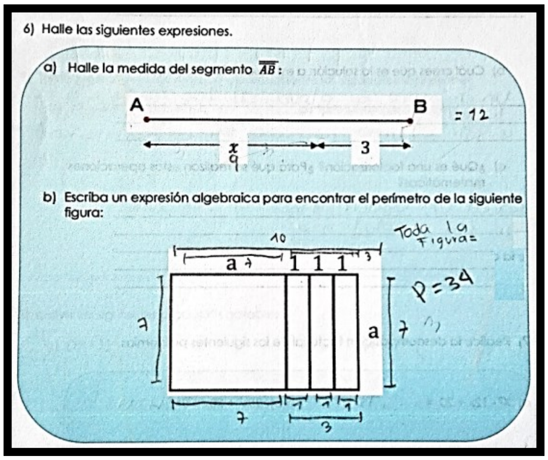


Ilustración 27. Respuesta E17. Actividad 6.

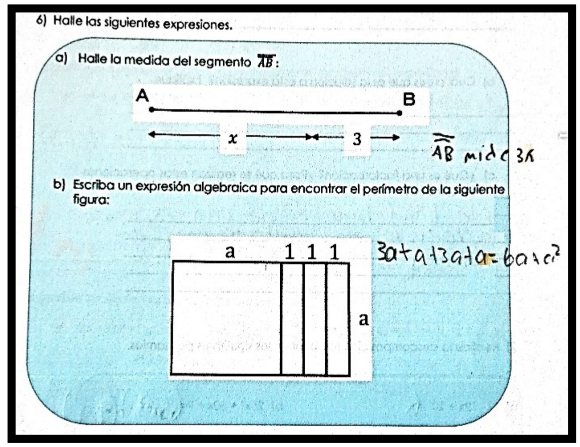


Ilustración 28. Respuesta E8 Actividad 6.

En la pregunta 7 y 8, Factorización de polinomios y representación de polinomios cuadráticos, respectivamente, concepto que nos merece la mayor atención en esta investigación, se pide a los estudiantes que factoricen algunos polinomios por métodos algebraicos conocidos y realicen una representación gráfica de la misma.

En la pregunta 7, el 42% no contesta la pregunta, 29% no tuvo ningún acierto, 26% tuvieron aciertos en uno o dos ejercicios y sólo un estudiante (3%), E14, factoriza algebraicamente en forma correcta los cuatro ejercicios (Ilustración 29), usando el método de agrupación de términos, particularmente, este estudiante que se le nota una habilidad algebraica en su tratamiento, tuvo dificultades durante el proceso de la investigación para representar geométricamente polinomios y en general su tratamiento en el plano cartesiano.

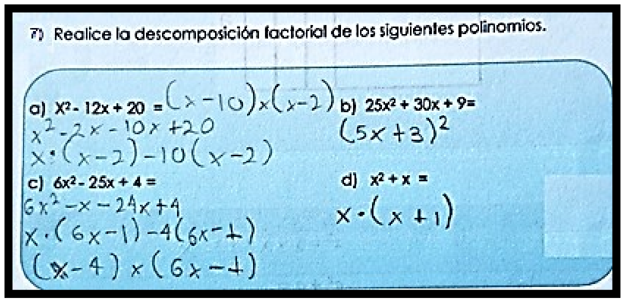
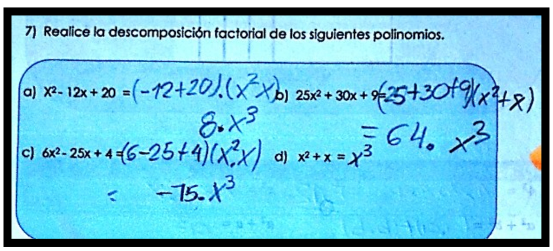


Ilustración 29 .Respuesta E14. Pregunta 7. Factorización de polinomios.

En las siguientes ilustraciones observamos algunas de las respuestas de los otros estudiantes.



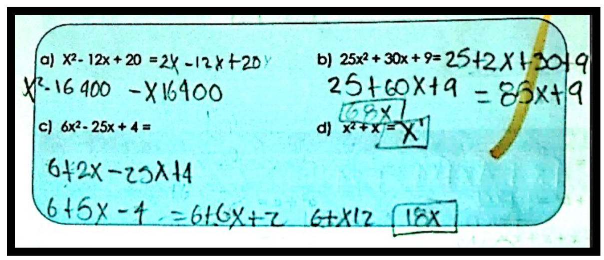


Ilustración 30 Respuesta E15.

Pregunta 7. Factorización de polinomios.

Ilustración 31 Respuesta E6

Pregunta 7. Factorización de polinomios.

Gráficamente, hubo algunos acercamientos a la representación geométrica y en el plano cartesiano, pero en general, los estudiantes evidencian no tener idea de cómo realizar la representación.

Para terminar, se realiza un análisis en forma individual con los promedios por estudiante en el diagnóstico aplicado y se obtienen los siguientes datos.

Tabla 5. Diagnóstico. Promedio por estudiante.

ESTUDIANTE #	PROMEDIO		ESTUDIANTE #	PROMEDIO
1	1,6		**16**	1,4
2	1,9		**17**	1,8
3	1,1		**18**	1,8
4	1,4		**19**	1,5
5	2,1		**20**	2,5
6	1,6		**21**	1,4
7	1,6		**22**	1,6
8	1,9		**23**	1,6
9	2,5		**24**	1,8
10	3,3		**25**	1,4
11	1,6		**26**	1,8
12	1,6		**27**	1,6
13	1,4		**28**	1,9
14	2,0		**29**	2,0
15	2,6		**30**	2,0
			31	1,9

Entre los resultados más representativos se aprecia que cuatro estudiantes (E5, E14, E29 y E30) obtienen promedios entre 2.0 y 2.1, es decir, en términos de la rúbrica aplicada, son estudiantes que resuelven con dificultad los ejercicios planteados; y cuatro estudiantes (E9, E10, E15 y E20) obtienen un promedio entre 2.5 y 3.3, es decir que resuelven con dificultad o poca dificultad los ejercicios planteados.

Por consiguiente, el 26% de la población analizada se encuentra en la escala entre "no muy bien" y "muy bien" y el 74% de la población se encuentra en la escala entre "Deficiente" y "no muy bien".

En conclusión el diagnóstico evidencia, por una parte, el predominio en el registro numérico-aritmético, el cual se atribuye al hecho de ser el que los estudiantes han manejado durante el mayor tiempo de su formación académica. Por otra parte, hay un desconocimiento total sobre el manejo de la variable y grandes dificultades en tratamientos algebraicos y geométricos.

4.2. Fase 2. Orientación Dirigida.

Siendo esta una fase de exploración, en la cual los estudiantes deben descubrir, comprender y aprender los nuevos conceptos, se diseñaron varias actividades, en orden secuencial, con el fin de inducirlos en forma consciente y familiarizarlos con las estructuras del registro geométrico (Cabello, 2013); según Duval, es la etapa que corresponde a la formación del registro.

Las actividades diseñadas fueron las siguientes:

Actividad #1. Repaso de conceptos.

Actividad # 2. Inducción al álgebra geométrica.

Actividad # 3. La Caja de Polinomios.

Actividad # 4. Tratamiento en el registro geométrico.

4.2.1. Actividad #1. Repaso de Conceptos.

Tomando como referencia el diagnóstico aplicado al grupo de estudiantes, se diseñó una guía, en la cual se refuerzan los conceptos diagnosticados, necesarios para la implementación del material objeto de esta investigación. (Anexo C).

En esta guía se hacen aclaraciones acerca de lo que es un factor, su interpretación y representación geométrica; el concepto de variable como valor desconocido (incognita específica) y su uso geométrico; el concepto de perímetro y área de figuras rectangulares; el concepto de polinomio, su factorización y algunos métodos algebraicos.

Para el proceso de factorización de polinomios cuadráticos se instruye a los estudiantes en el método cruzado, que consiste en buscar dos factores del primer término (1) y dos del tercero (2) colocándolos en columna de modo que al multiplicarlos de forma cruzada (producto cruzado) (3) la suma de los productos sea igual al segundo término.

Ejemplo 1:

$$x^2 - 10x + 21$$

$$\begin{array}{llll} (x & -7) & \rightarrow & -7x \\ (x & -3) & \rightarrow & +\underline{-3x} \\ & & & -10x \end{array}$$

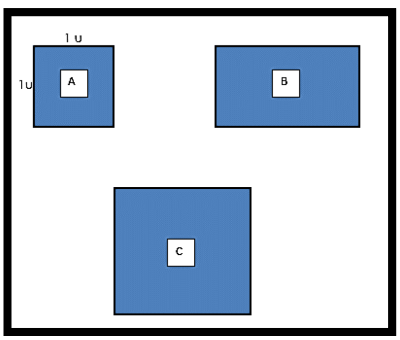
$$\boxed{x^2 - 10x + 21 = (x-7)(x-3)}$$

Ecuación 4. Factorización por el método cruzado.

4.2.2. Actividad # 2. Inducción al álgebra geométrica.

Esta actividad está compuesta de dos ejercicios, distribuidos así:

Ejercicio I: Se entrega en forma física tres fichas rectangulares. El propósito es que el estudiante identifique y atribuya a los segmentos que conforman a las figuras geométricas (cuadrados y rectángulo) sus medidas en términos de variables, es decir, que realice operaciones traslacionales y rotacionales que le permitan comparar los lados de las fichas y llegue a congruencias entre sus lados. Además, debe hallar el perímetro y área de cada una de ellas.



CONTESTA:	
	PROCEDIMIENTO
1. Halle el perímetro de la figura A. Escriba sobre la figura en físico, la medida de cada uno de sus lados en números pequeños en el centro de cada lado	
2. Halle el área de la figura A. Escriba en el centro de la figura el área encontrada.	
3. Compara la figura A y la B, qué posibles medidas de ancho y largo tiene B? Escriba sobre la figura las medidas de cada uno de sus lados en números pequeños en el centro de cada lado.	
4. Halla el perímetro de la figura B.	
5. Halle el área de la figura B Escriba en el centro de la figura el área encontrada.	
6. Compara la figura B con la C, qué posibles medidas de lado tiene C? Escriba sobre la figura las medidas de cada uno de sus lados en números pequeños en el centro de cada lado.	
7. Halle el perímetro de la figura C	
8. Halle el área de la figura C. Escriba en el centro de la figura el área encontrada.	

Ilustración 32 . Actividad 2. Ejercicio I. Inducción al álgebra geométrica.

A pesar de haber realizado una orientación de refuerzo en los saberes del diagnóstico encontramos que sólo el 19% de los estudiantes identifican las medidas de las fichas en términos de variables, es decir, al conocer las medidas de la ficha A (1 unidad de lado) y sin utilizar instrumentos de medida convencionales, asignan letras a las medidas que no tiene valor al momento de comparar las fichas, y el 81% restante asignan valores a los lados para resolver la situación de perímetro y área, predominando una vez más el registro numérico y aritmético sobre el algebraico.(Socas, 2011b), como lo podemos apreciar en las siguientes ilustraciones:

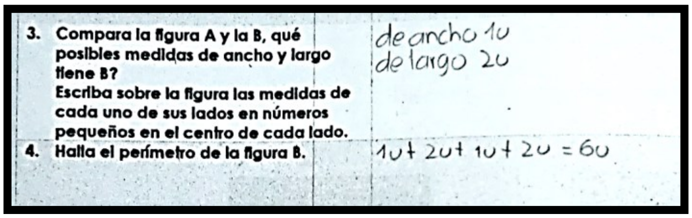


Ilustración 33. Respuesta E22. Actividad 2. Ejercicio I.

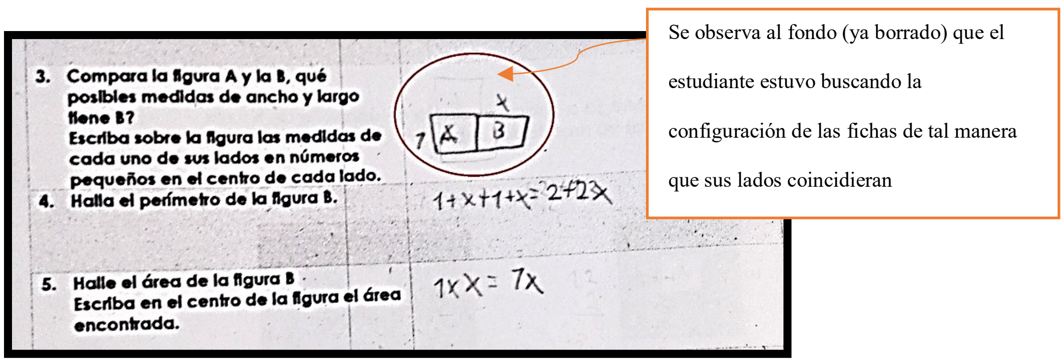


Ilustración 34. Respuesta E3. Actividad 2. Ejercicio I.

En esta imagen, el estudiante E3 deja ver sus operaciones rotacionales y traslacionales para encajar las fichas A y B, logrando configurar sus unidades figurales D1.

***Ejercicio II**:* se propone una figura compuesta con las fichas trabajadas en el ejercicio I, previa aclaración de las medidas unidimensionales y bidimensionales de cada una de las fichas por medio de la socialización que se hace a nivel grupal. En este ejercicio deben hallar el perímetro y el área como lo ilustra la siguiente imagen:

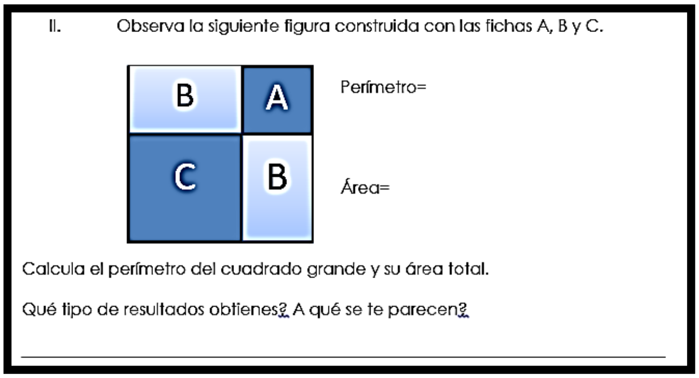


Ilustración 35. Actividad 2. Ejercicio II. Inducción al álgebra geométrica.

Al respecto, el 35% de los estudiantes realizaron correctamente la actividad completa sin cometer errores, es decir, identifican las unidades figurales D1 y D2 de la figura compuesta, asignando medidas numéricas y variables, además operan con éstas en forma correcta como se observa en la Ilustración 35. Del 65% restante, 32% halló bien el perímetro, 9% halló bien el área, 19% no lo hace correctamente y 5% no contesta.

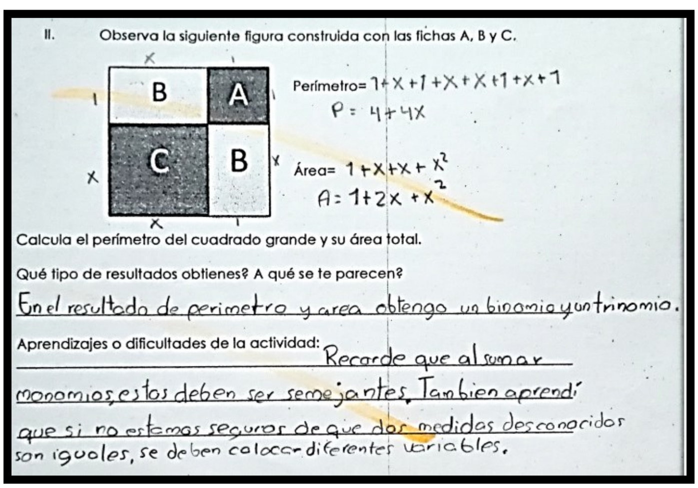


Ilustración 36 . Respuesta estudiante E10. Actividad 2. Ejercicio II.

Al analizar los errores cometidos por los estudiantes, se detectan problemas en el tratamiento algebraico; por ejemplo, al hallar el perímetro de la figura el estudiante frente a una operación algebraica, siente la necesidad de dar un solo resultado, a esta dificultad se le denomina error de clausura (Ruano et al., 2008) y se evidencian en situaciones como las siguientes:

- Totalizan la medida del lado del cuadrado $1 + x \; como \; 1x$, es decir, unen el *1* con la *x*; por lo tanto al hallar el perímetro de toda la figura, registran la siguiente operación: $P = 1x + 1x + 1x + 1x = 4x$, como lo podemos observar en la siguiente figura:

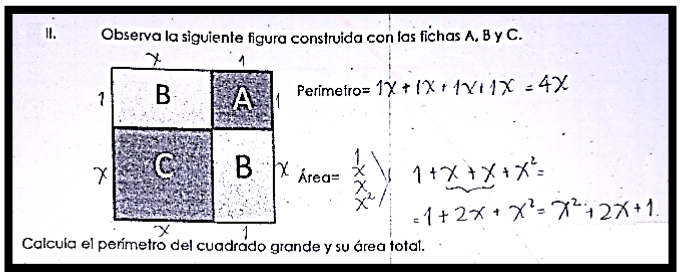


Ilustración 37. Respuesta estudiante E2. Actividad 2. Ejercicio II.

- Así mismo, habiendo escrito bien el perímetro de la figura, clausuran el resultado, sin tener en cuenta el tratamiento algebraico de términos semejantes y registran la siguiente operación: $P = 1 + x + 1 + 1 + x + 1 + x + x = \; 8x$.
- En la ilustración 37, la estudiante E31 pierde el sentido del concepto de perímetro y suma todos los lados de las fichas de la siguiente manera:

$$P = (1 + x) + (1 + x) + (1 + 1 + 1 + 1 + x + x + x + x + (1 + x) + (1 + x) = \; 4 + 4x$$

al final parece que toma nota del resultado de un compañero ya que no es coherente de ninguna manera.

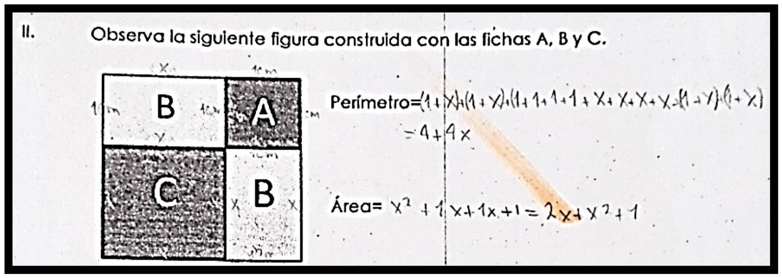


Ilustración 38. Respuesta estudiante E31. Actividad 2. Ejercicio II.

En el cálculo del área total, se presentan errores muy similares en el tratamiento algebraico como son:

- $A = 1x.1x = 1x^2$, igualmente, asumen $1 + x \; como \; 1x$
- $A = 1 + x . 1 + x = 1 + x^2$, dificultad con el manejo de paréntesis y propiedad distributiva.
- $A = (1 + x)(1 + x) = 1x$, dificultad en el uso de la propiedad distributiva
- $A = x. 1. x^2. x = x^3$, dificultad al identificar el todo como la suma de sus partes. Conciben el área como el resultado de una multiplicación.

En cuanto a las conclusiones emitidas en el ejercicio, el 42% de los estudiantes identifican en los resultados del perímetro y el área expresiones algebraicas como polinomios, binomios o trinomios y el 58% no contesta la pregunta.

4.2.3. Actividad # 3. La Caja de Polinomios.

Se hace la presentación del material “La Caja de Polinomios” compuesto de figuras geométricas entre cuadrados y rectángulos, como las trabajadas en la actividad anterior. Se dan las reglas de tratamiento entre las figuras: fichas vecinas deben coincidir en su lado de vecindad. Cuando no es posible que esto ocurra, el contacto de vecindad se obliga a ser un vértice.

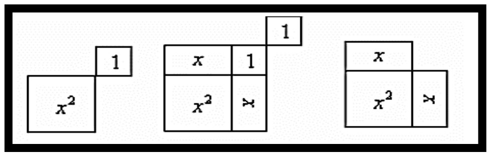


Ilustración 39. Reglas de tratamiento en la Caja de Polinomios.

Este tratamiento presenta cierto grado de dificultad ya que los registros no son congruentes en su totalidad, es decir, no cumplen con los tres criterios de Duval (1991), ya que:

- A pesar de que existe una correspondencia "semántica" de los elementos significantes, como se ve en la siguiente figura:

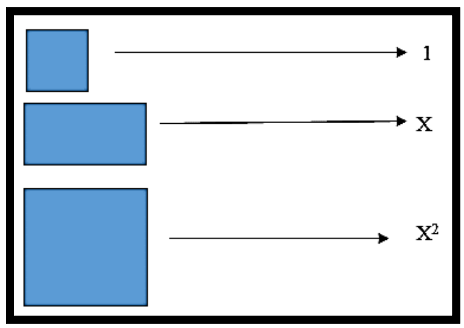


Ilustración 40. Correspondencia semántica de los elementos significantes en la Caja de Polinomios.

No se cumple la univocidad semántica terminal, es decir, a cada unidad significante elemental de la representación de salida no le corresponde una única significante en el registro de llegada, como se evidencia en la siguiente imagen:

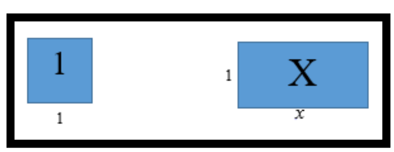


Ilustración 41. Unidades figurales D1 de las fichas de área 1 y X.

La unidad "1" en el registro numérico y "X" en el registro algebraico, geométricamente están representado tanto unidades significantes en D1 como en D2.

- Tampoco se cumple la organización de las unidades significantes ya que es pertinente solo cuando éstas tienen el mismo número de dimensiones. Al respecto, cuando escribimos la expresión X+1, nos podríamos referir a la dimensión de un segmento, o también nos podríamos referir al área total de una figura poligonal compuesta de un área X y un área 1.

La actividad a realizar es formar figuras poligonales, hallar su perímetro y su área total, con el fin de que el estudiante se apropie de las unidades figurales D1 y D2 del nuevo registro de representación realizando conversiones entre el registro geométrico y algebraico, como lo muestra la siguiente figura:

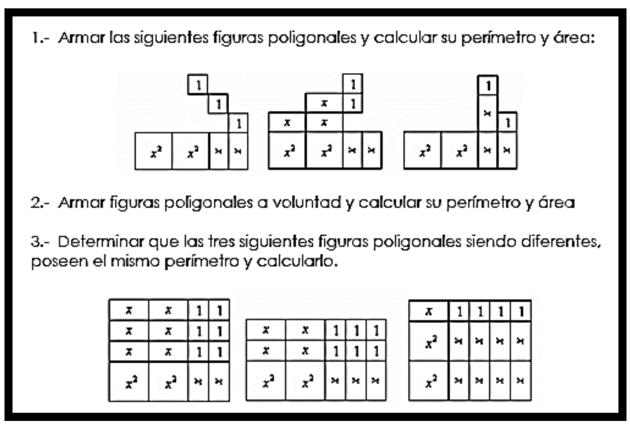


Ilustración 42. Actividad 3. La Caja de Polinomios.

En esta actividad el 42% de los estudiantes obtienen resultados correctos, el 13% tiene algunos aciertos y el 45% presenta dificultades para realizar la conversión e identificar las unidades figurales D1 y D2 o no realizan la actividad.

Entre algunos de los errores cometidos en los procedimientos se presentan los siguientes:

- Registran como medida del lado de la ficha x^2, el mismo valor de x^2, es decir no identifican las unidades D1 del registro geométrico en D2, como se aprecia en la siguiente imagen:

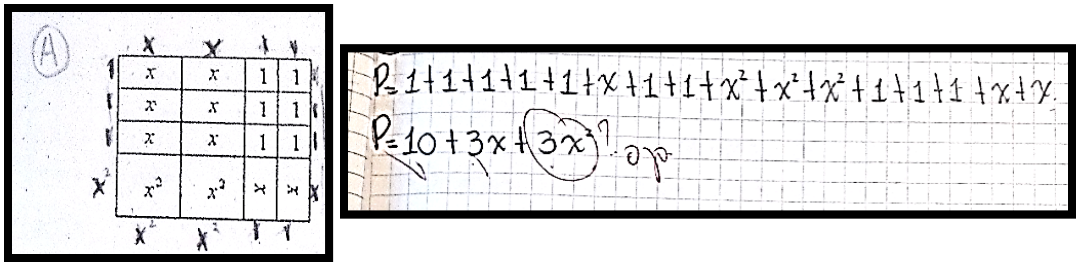


Ilustración 43.Respuesta estudiante E1. Actividad 3. Ejercicio 3. La Caja de Polinomios.

- Nuevamente, se presentan errores de clausura, donde $1 + x = 1x$, como se había mencionado anteriormente, el estudiante siente la necesidad de dar un solo resultado y une las expresiones sin tener en cuenta las reglas de tratamiento en este registro.

- Expresan el área total como la multiplicación de las áreas parciales, pero expresan el resultado en suma, así: $A = 1.1.1.x.x.x^2.x^2 = 3 + x^2 + x^4$, cometiendo igualmente errores de potenciación. Tal hecho se evidencia en la siguiente imagen:

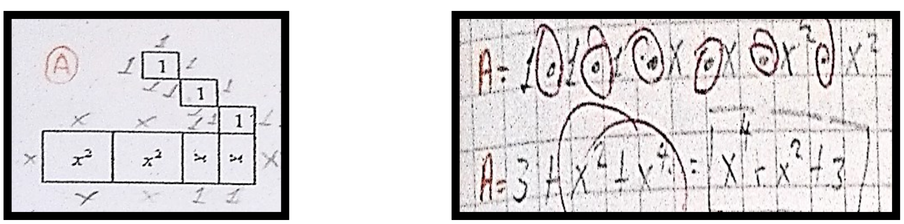


Ilustración 44. Respuesta estudiante E12. Actividad 3. Ejercicio 1. La Caja de Polinomios.

- Al hallar el perímetro el estudiante suma los lados de las unidades sub-figurales, es decir, no tiene claro el concepto de perímetro en una figura geométrica compuesta. (Ilustración 45)
- Al hallar el área total, multiplica las áreas de las unidades sub-figurales.

$A = 1.x.1.x.x.x^2.x^2 = 2.x^3.x^4 = 2.x^7$.

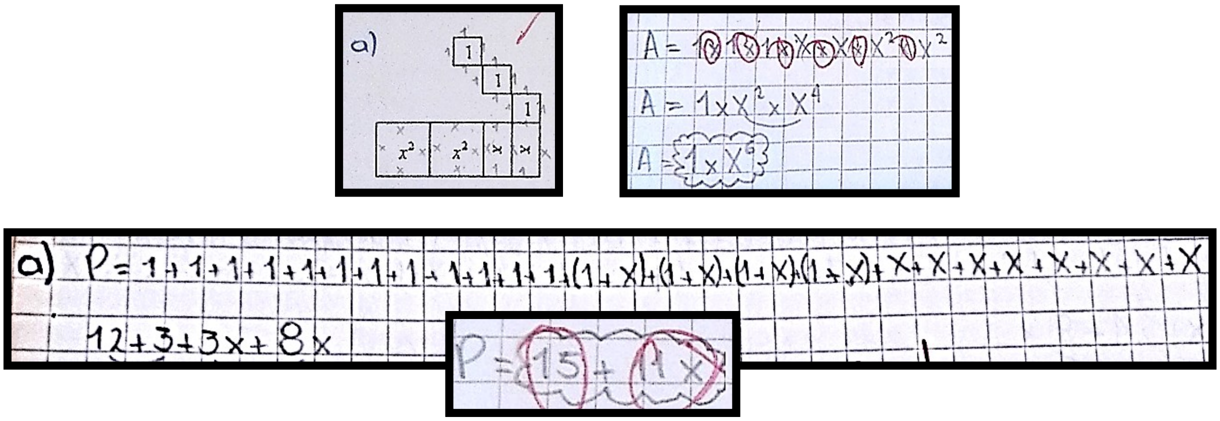


Ilustración 45. Resultados estudiante E31. Actividad 3. Ejercicio 1. La Caja de Polinomios.

4.2.4. Actividad #4. Tratamiento en el registro geométrico.

Para realizar operaciones en el registro geométrico se requiere de un elemento adicional muy importante como lo es el plano cartesiano.

4.2.4.1. Plano Cartesiano.

El plano cartesiano cumple dos funciones muy importantes: el signo sobre sus ejes coordenados teniendo como punto de referencia el origen y el signo de acuerdo al número del cuadrante, como se indicó en la Ilustración 15.

Para representar un polinomio, se ubican en los cuadrantes, los términos o fichas de acuerdo con el signo del cuadrante.

Ejemplo 2. Algunas representaciones del polinomio x^2+x-1 son:

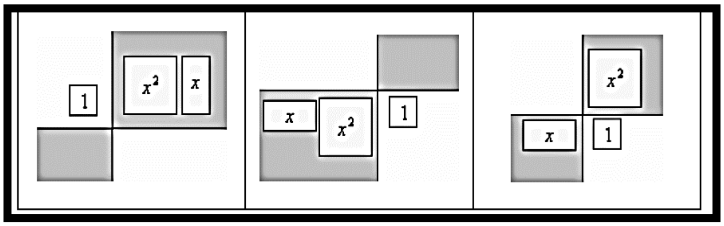


Ilustración 46. Tratamiento de la Caja de Polinomios

4.2.4.2.Ceros algebraicos.

Cuando dos fichas de la misma clase se encuentran en dos cuadrantes con signos opuestos, se dicen que son un cero algebraico o simplemente su valor es CERO.

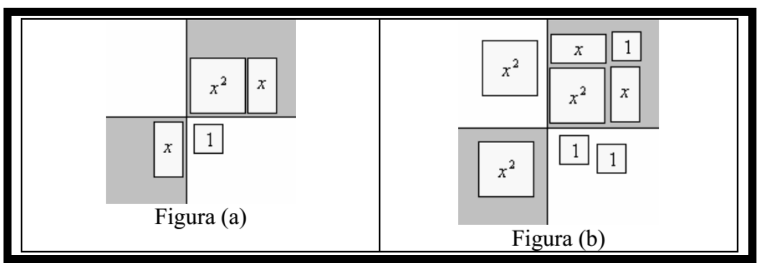


Ilustración 47. Ceros algebraicos.

En la figura (a) las fichas *x* en el primer cuadrante y *x* en el tercer cuadrante no son un cero ya que ambos cuadrantes son positivos, en este caso ambas se sumarían.

En cambio en la figura (b), la ficha x^2 del primer o tercer cuadrante hace un *cero* con la ficha x^2 del segundo cuadrante por tener signos opuestos. Igual sucede con la ficha 1 del primer cuadrante con una de las fichas 1 del cuarto cuadrante, éstas forman un *cero.*

En ambos planos está representado el mismo polinomio $x^2 + 2x - 1$, sólo que en la figura (b) hay más fichas, pero *los ceros algebraicos* no se deben leer.

4.2.4.3.Adición de Polinomios.

Para calcular la suma de p(x) y q(x) es conveniente escribir el primer sumando p(x) utilizando únicamente los cuadrantes *segundo y tercero*; el sumando q(x) se escribe, en los cuadrantes *primero y cuarto*.

Sumar es sinónimo de *agregar*, de modo que la suma se calcula leyendo el polinomio que queda escrito en *todo el tablero* (Plano Cartesiano).

Para leer un polinomio es aconsejable retirar del plano todos los *ceros* que se produzcan.

Ejemplo. Para efectuar la adición del polinomio
$p(x) = 2x^2 - 3x + 4$ con $q(x) = -x^2 + x - 2$

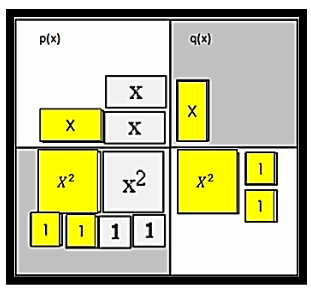


Ilustración 48. Adición de polinomios.

Se ubica cada polinomio en los cuadrantes correspondientes. Luego se deben retirar del plano, si los hubiese, los pares de fichas que equivalgan algebraicamente a *cero*.

4.2.4.4.Multiplicación de polinomios.

El plano cartesiano está configurado a partir de dos ejes perpendiculares que se cortan en el origen de coordenadas; cada uno de los ejes contiene dos direcciones opuestas: positiva y negativa.

Para cada rectángulo que se construya, de aquí en adelante, las dimensiones se leerán como base y altura en su orden, siendo la base el lado paralelo al eje "*x*" y la altura, el lado paralelo al eje "*y*" y en concordancia con la orientación de los ejes. De esta manera, la ubicación de una ficha o de un rectángulo a partir del origen y haciendo uso de los ejes coordenados establece unas dimensiones distintas, como se muestra con las siguientes disposiciones de la ficha *x*:

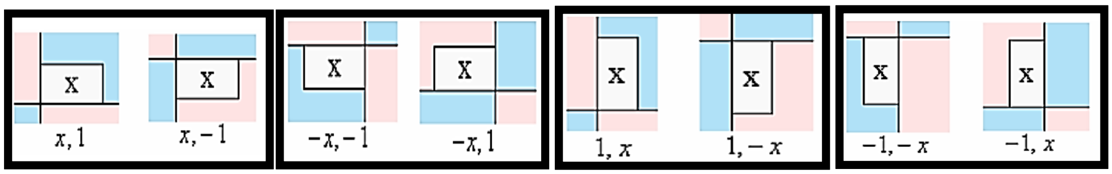


Ilustración 49. Tratamiento en el plano cartesiano. Ubicación de las fichas respecto a los ejes coordenados.

El producto p(x) · q(x) corresponde al valor algebraico relativo de las fichas que configuran un rectángulo de base p(x) y de altura q (x) o viceversa. La lectura del producto se realiza, después de retirar los pares de fichas que algebraicamente equivalen a cero y que se ubican, para recordarlo, en cuadrantes de colores distintos, si es que los hubiese.

En el producto $(2x-1)(x+2)$, se toma como base al polinomio $p(x) = 2x - 1$ ubicando dicho polinomio a partir del origen y haciendo uso adecuado de los ejes coordenados, como se muestra en la siguiente figura. Una vez hecho eso y utilizando el criterio de que fichas adyacentes deben tener la misma dimensión en su frontera común, se configura la altura del rectángulo cuya dimensión está dada por el factor $q(x) = x + 2$; así:

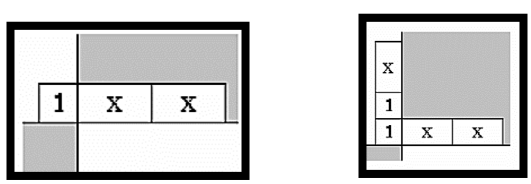


Ilustración 50. Tratamiento multiplicación de polinomios.

Luego, se arma completamente el rectángulo utilizando tantas fichas como sea necesario. Finalmente se procede a retirar fichas que algebraicamente equivalen a *cero*; en este caso, un par de fichas rotuladas con “x” y se lee la respuesta teniendo en cuenta la ubicación de las fichas en sus respectivos cuadrantes:

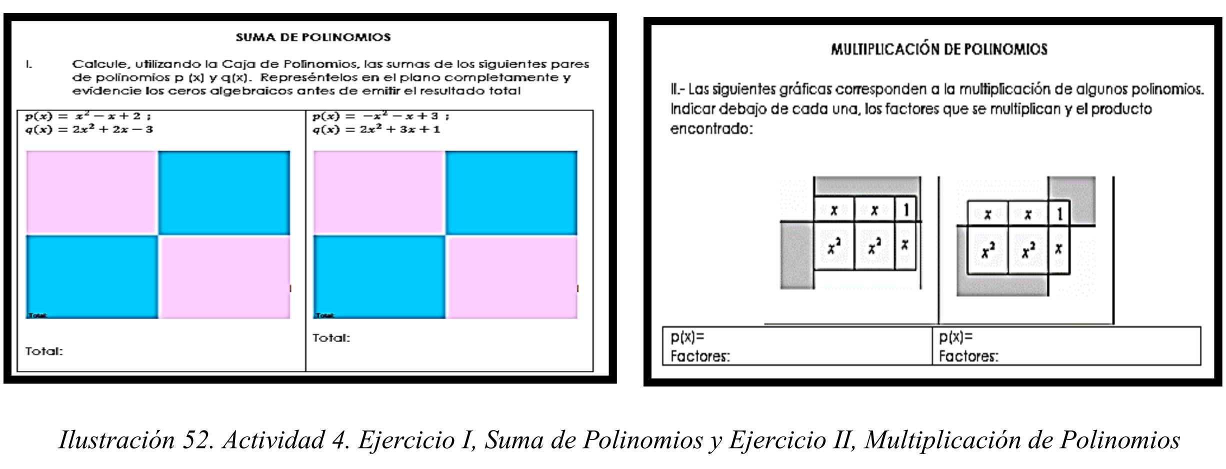
$$(2x-1)(x+2)=2x^2+3x-2$$

Ilustración 51. Tratamiento multiplicación de polinomios.

Para el estudiante se convierte en un reto de mayor dificultad ya que debe configurar unidades figurales D1 para obtener como resultado configuraciones en D2.

Para esta actividad se realiza un taller en grupos con el fin que puedan intercambiar ideas y construir conceptos.

Posteriormente se propone la siguiente actividad individual compuesta de tres ejercicios para validar en los estudiantes su capacidad de visualización, el correcto uso del tratamiento en la representación geométrica, su capacidad de configurar las unidades de salida por medio de rotaciones y traslaciones para lograr la figura de llegada deseada y finalmente, hacer conversiones al registro algebraico.



SUMA DE POLINOMIOS

I. Calcule, utilizando la Caja de Polinomios, las sumas de los siguientes pares de polinomios p (x) y q(x). Represéntelos en el plano completamente y evidencie los ceros algebraicos antes de emitir el resultado total

$p(x) = x^2 - x + 2$; $q(x) = 2x^2 + 2x - 3$	$p(x) = -x^2 - x + 3$; $q(x) = 2x^2 + 3x + 1$
Total:	Total:

MULTIPLICACIÓN DE POLINOMIOS

II.- Las siguientes gráficas corresponden a la multiplicación de algunos polinomios. Indicar debajo de cada una, los factores que se multiplican y el producto encontrado:

p(x)= Factores:	p(x)= Factores:

Ilustración 52. Actividad 4. Ejercicio I, Suma de Polinomios y Ejercicio II, Multiplicación de Polinomios

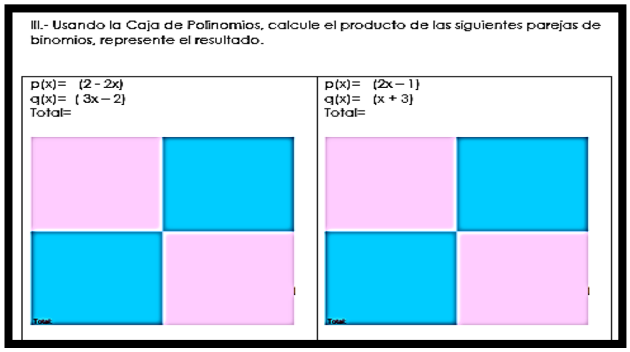


Ilustración 53 Actividad 4. Ejercicio III. Multiplicación de Polinomios.

Analizando los resultados del ejercicio I, suma de polinomios, el 84% lo hace muy bien, identifican el signo del cuadrante, identifican ceros algebraicos y realizan la conversión del resultado en forma algebraica (Ilustración 54).

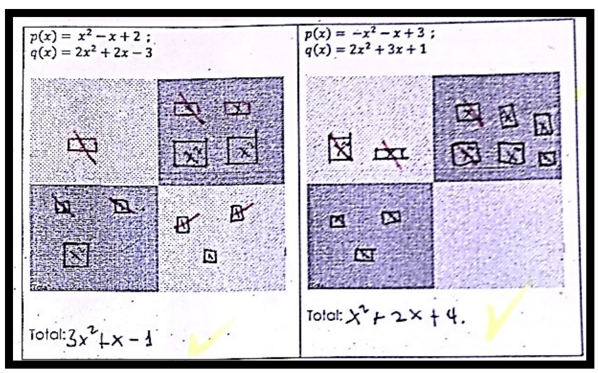


Ilustración 54. Respuesta estudiante E12. Actividad 4. Ejercicio I. Suma de Polinomios.

El 16% restante, algunos no contestan, otros cometen errores de tratamiento en el registro geométrico como son:

- Sumar términos de distinto signo. No tienen en cuenta ceros algebraicos.
- Realizan las operaciones algebraicamente y ubican el resultado en el plano.
- Confundieron el procedimiento de la suma con la multiplicación.

En el ejercicio II (Ilustraciones 55), 16% realiza el ejercicio correctamente, es decir, identifican bien las unidades figurales D1 y D2 y realizan conversiones al registro algebraico.

El 26% resuelven con errores en los signos tanto de las unidades D1 como de las D2, pero evidencian en cierta forma comprensión en los aspectos evaluados y al hacer correcciones son conscientes de sus faltas.

El 16% identifican sólo unidades figurales D2, es decir, hallan el polinomio resultante, pero no los factores.

Finalmente, el 42% presentan dificultades en la mayoría de aspectos evaluados, no hay coherencia en los procedimientos, es decir, son estudiantes con los que se debe retomar las actividades anteriores para que puedan interiorizarlas.

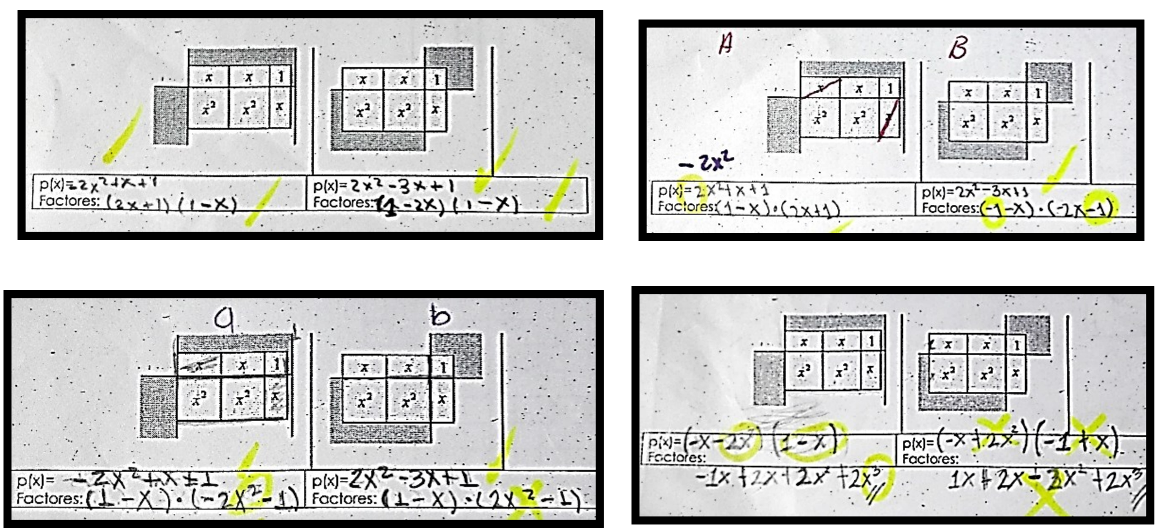


Ilustración 55. Respuestas Actividad 4. Ejercicio II. Multiplicación de Polinomios.

En el ejercicio III (Ilustraciones 56), el cual requiere de mucha más comprensión y capacidad de visualización, 19% resuelve correctamente las dos multiplicaciones; configuran y hacen conversiones al registro algebraico, mostrando un buen dominio del tratamiento geométrico.

El 13% intenta resolver las multiplicaciones con algunos aciertos, pero presentan dificultades en el tratamiento al ubicar las unidades figurales D1 respecto a los ejes a partir del origen, coordinar esto con los signos de los ejes y diferenciarlos de los signos de los cuadrantes y finalmente realizar la conversión en unidades figurales D2.

El 48% intentan resolver las multiplicaciones pero con muchas inconsistencias. En algunos casos, confunden el tratamiento de la multiplicación con la suma.

Y el 19% deja en blanco la hoja, mostrando así su inseguridad o poca comprensión en el tratamiento del registro geométrico.

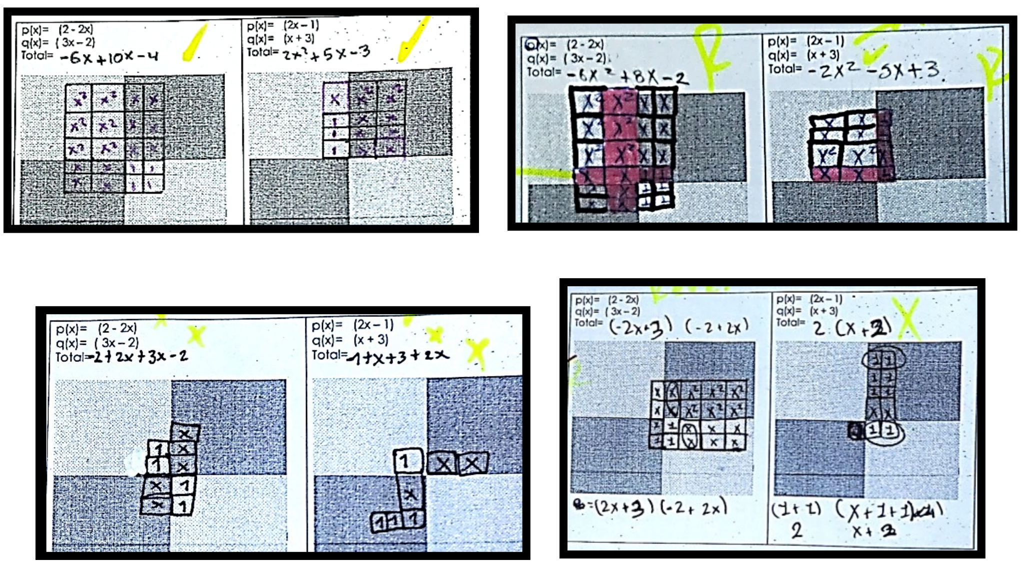


Ilustración 56. Respuestas. Actividad 4. Ejercicio III. Multiplicación de Polinomios.

En resumen en esta fase, los estudiantes se han apropiado en una forma aceptable el nuevo registro, muestran comprensión en el manejo del tratamiento del mismo, con algunas dificultades en las operaciones de visualización, las cuales se van resolviendo en la socialización de las actividades y en las fases siguientes.

4.3. Fase 3. Explicitación.

Esta fase se enfoca en el tratamiento y conversión del proceso de factorización en el registro geométrico. Para ello, se establecen las reglas de manejo como se mencionó anteriormente en la Caja de Polinomios (Ilustraciones 15,16,17,18), sobre el encuadre minimal viable, y la factorización de polinomios completos e incompletos.

Para esta fase se proponen dos actividades, una grupal y otra individual, con el fin que puedan intercambiar ideas, construir conceptos y validar saberes.

4.3.1. Actividad #1. Trabajo grupal.

Formando parejas de estudiantes y luego uniéndose en grupos de cuatro, deben realizar el encuadre minimal viable de polinomios cuadráticos completos e incompletos y una vez logrado el encuadre registrar en forma algebraica la factorización del polinomio, es decir, hacer la conversión del registro geométrico al algebraico.

Al respecto (Ilustración 57), el 39% realizan correctamente el ejercicio, hacen encuadres minimales de polinomios completos e incompletos y encuentran sus factores, es decir, que realizan una correcta configuración de las unidades figurales de salida y hacen una correcta conversión del registro geométrico al algebraico.

El 45% realizan algunos encuadres minimales correctamente. Presentan dificultad en los signos, tanto de los cuadrantes como de los ejes para leer los factores, también en identificar las unidades D1.

Y el 16% tiene dificultades, tanto con el encuadre minimal como con la conversión al registro algebraico para hallar los factores, debido a problemas en las operaciones visuales y las reglas de tratamiento

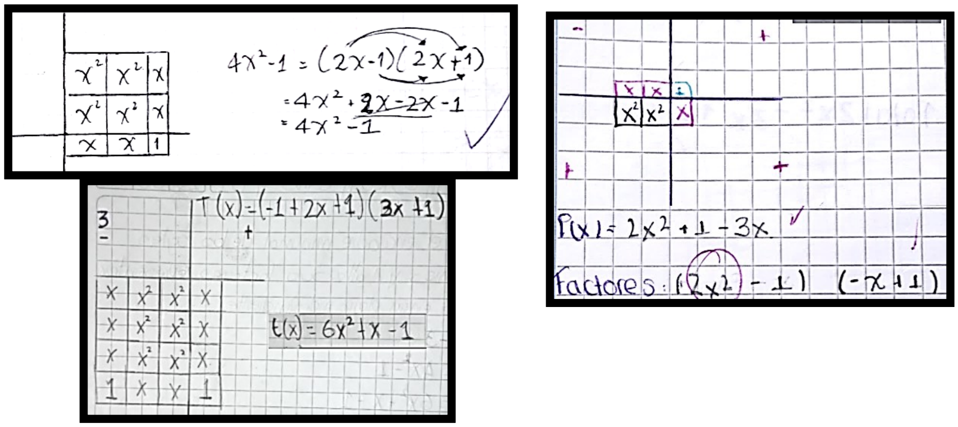


Ilustración 57. Respuesta estudiante E2. Factorización de polinomios.

Se realiza la socialización en todo el grupo para la retroalimentación, detección y corrección de errores cometidos.

Al revisar el procedimiento del estudiante E20, que en particular es un estudiante que se desempeña bien en el registro algebraico, se nota que primero factoriza algebraicamente y luego lo representa en el plano. Al respecto surge la siguiente intervención:

Profesora: ¿Puedes factorizar en forma geométrica el polinomio $6x^2 + x - 1$*?*
Estudiante: Profe, es que así me queda muy difícil.
P: ¿Cómo?
E: Así, este método. Me tomaría más tiempo.
P: ¿Y cómo has hecho para resolver los otros?
E: Así profe, hallando la base y la altura.
P: Ah bueno, muéstrame con este polinomio.

El estudiante empieza a configurar las fichas buscando el encuadre minimal.

P: ¿Qué tienes que hacer y cómo sabes que lo estás haciendo bien?
E: Haciendo el encuadre minimal.
P: ¿Y cómo sabes que te queda bien?

E: Por los ceros algebraicos.

P: ¿Y te quedaron ceros algebraicos?

E: Si, porque acá (señalando el cuadrante azul) me queda positivo y acá (señalando el cuadrante rojo) me queda negativo.

P: ¿Cuántos ceros algebraicos hay?

E: Dos.

P: ¿Cómo sabes que te quedó bien la factorización?

E: Aplicando la propiedad distributiva.

P: ¿Pero en el plano cómo sabes que el encuadre que hiciste si es correcto?

E: Con la base y la altura.

P: ¿Cómo sabes qué son la base y altura correctas?

E: Mmm, no sé. (Aún le falta tener en cuenta las reglas del tratamiento del registro geométrico).

P: ¿Cuál es la factorización del polinomio?

E: $(3x^2 - 1)(2x^2 + 1) = 6x^2 + x - 1$

P: Realízalo ahora en forma algebraica.

E: ¿Por el método que nos enseñó?

P: Si, o por otro que conozcas bien.

E: $(2x + 1)(3x - 1)$ (lo hace por el método cruzado mencionado al inicio en la fase 2).

P: Ahora compáralo con el resultado que obtuviste en el plano.

E: Pues faltó el cuadrado.

P: ¿Cómo hacemos para saber cuál es el correcto?

E: Probándolo, con la propiedad distributiva.

P: Muy bien hazlo.

E: Listo.

P: ¿Te dio correcto?

E: Si señora.

P: Ahora prueba con los factores que te dieron en el plano.

E: Profe, no me dio.

P: ¿Por qué dices que no te dio?

E: Por los exponentes.

P: ¿Qué pasó con los exponentes?

E: Pues aumentaron.

P: Revisa en el plano nuevamente.

P: ¿De los dos resultados, cuál crees que es más correcto?

E: Pues yo tengo más confianza en el algebraico.

P: ¿Qué crees que hiciste mal en el plano?

E: Tal vez los ubique mal.

P: ¿Cuál es el objetivo en el plano con el polinomio?

E: ¿Hacer el rectángulo? (dudoso).

P: ¿Al leer el polinomio es el original?

E: Sí.

P: Entonces tenemos dos situaciones que permiten creer que vas por buen camino.

P: ¿Cuál es la base, dónde se lee?

E: Es 3x… ahh 3x-1 (cae en la cuenta de su error de lectura e identificación de las unidades figurales D1*).*

P: Y por qué habías puesto el cuadrado.

E: Ahh por el área.

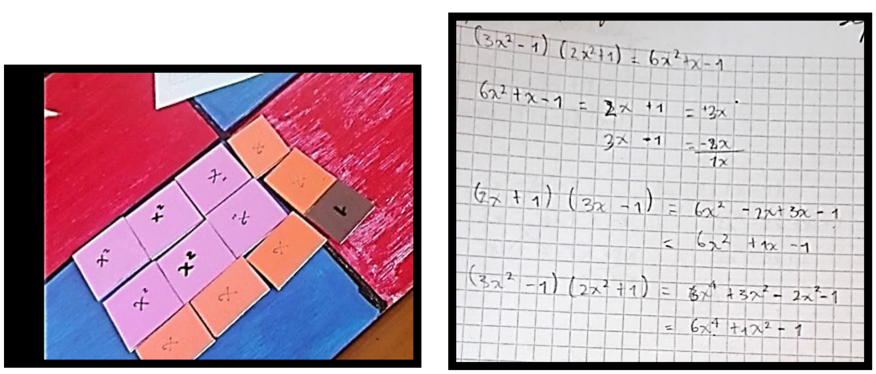


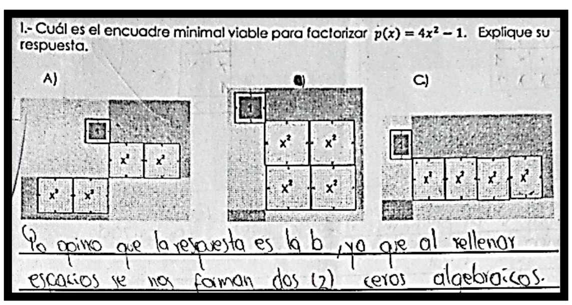
Ilustración 58. Respuesta estudiante E20. Factorización de polinomio cuadrático

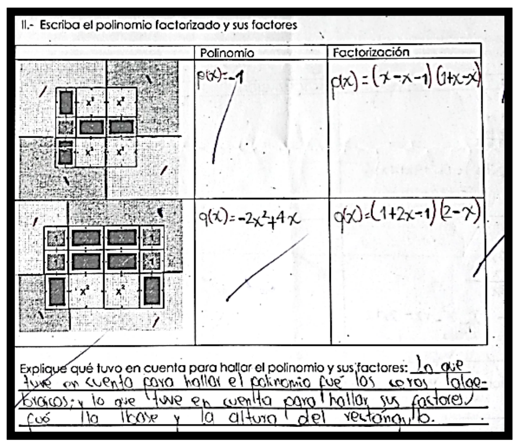
El error en la lectura de la base y la altura en el registro geométrico obedece no a una falta de comprensión como al final se evidencia si no que el estudiante desde el inicio del ejercicio y dado al multi-registro muestra su preferencia por el registro algebraico ya que lo considera una manera más económica y potente que la otra (Cerda-Morales, 2011).

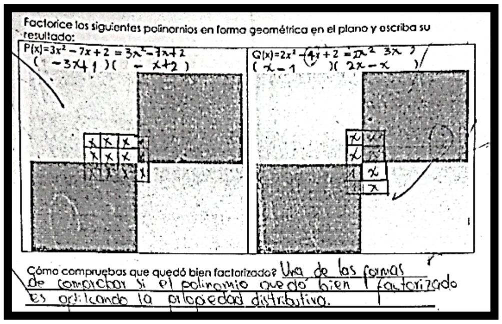
4.3.2. Actividad # 2. Trabajo individual.

Se realiza la validación de saberes en forma individual con una prueba en la cual se indaga sobre encuadre minimal, conversión de factorizaciones geométricas a algebraicas, factorización geométrica y factorización algebraica.

Analizando los resultados se obtiene que el 48% realizan correctamente las factorizaciones en forma geométrica realizando conversiones al lenguaje algebraico e identificando correctamente las unidades figurales D1, D2 y realizando configuraciones que les permita encontrar la factorización de los polinomios propuestos, como se aprecia en las siguientes imágenes:







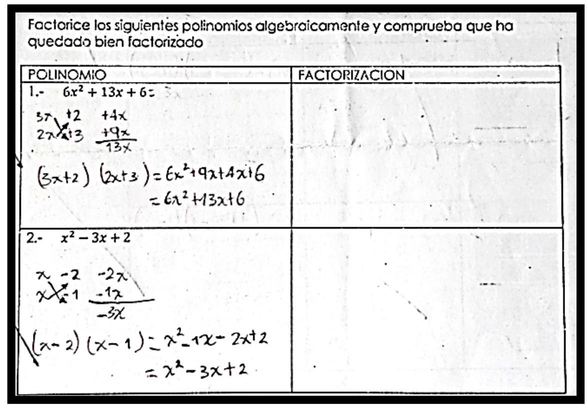
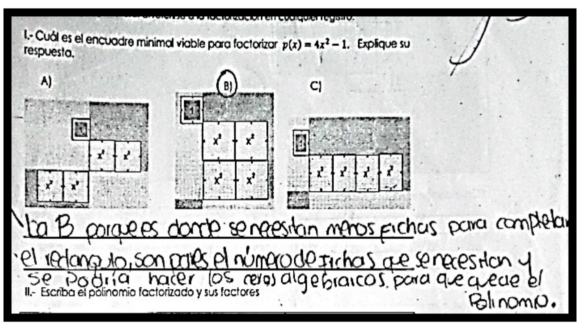
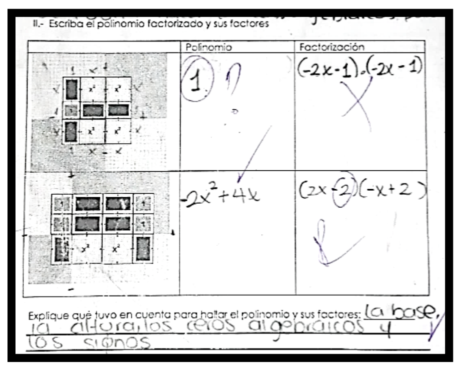
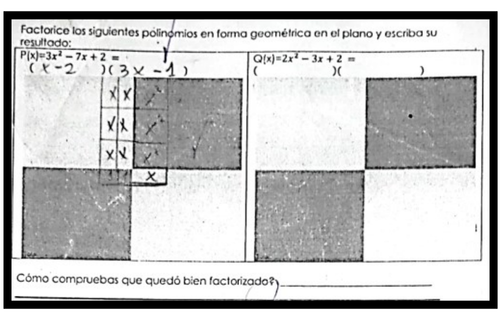


Ilustración 59. Respuesta pregunta I, II, III, IV. Estudiante E20. Factorización de polinomios. Prueba individual.

El 19% realizan las configuraciones de los polinomios a factorizar muy bien y hallan sus factores realizando conversiones al lenguaje algebraico, pero presentan aún dificultades con los signos de los ejes al registrar los factores, como se observa en las siguientes imágenes:







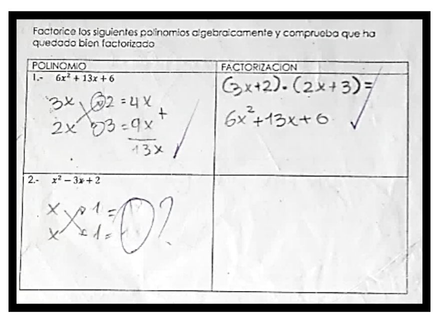


Ilustración 60. Respuesta pregunta I,II, III, IV estudiante E26. Factorización de polinomios. Prueba individual.

Y el 32% restante, no lo resuelven o cometen aún muchos errores en el tratamiento del registro geométrico y algebraico. Otros factores que inciden en este porcentaje son la inasistencia y problemas sociales de los estudiantes.

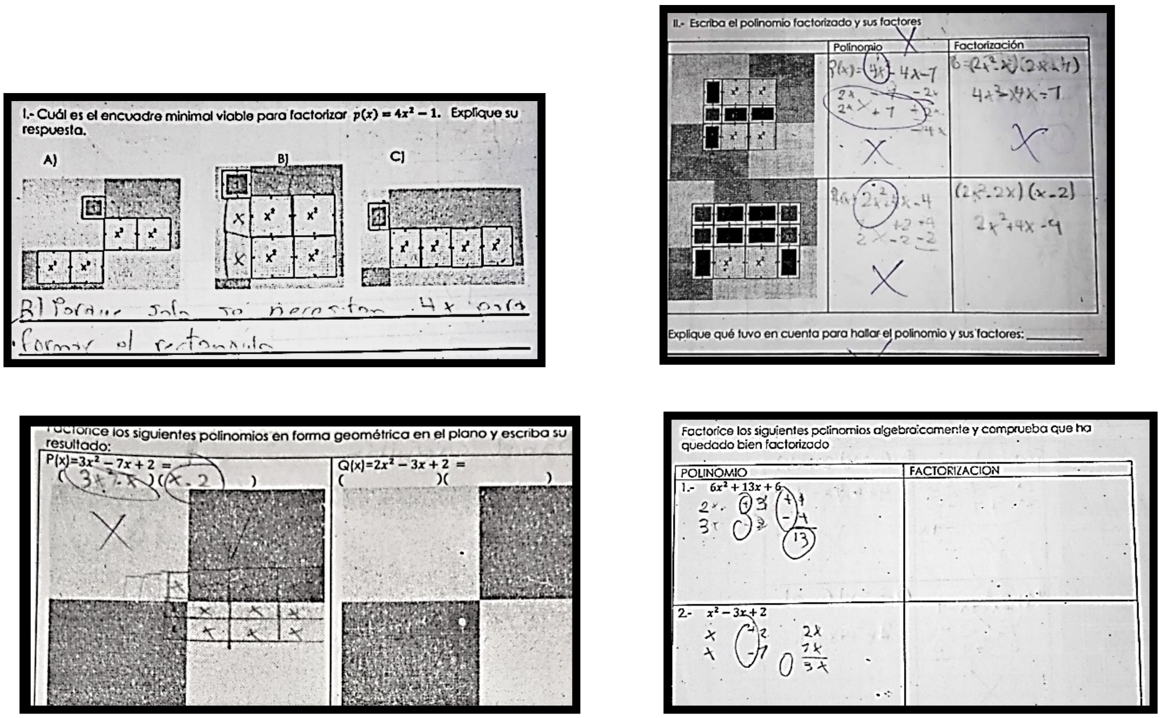


Ilustración 61. Respuesta preguntaI, II, III, IV. Estudiante E3. Factorización de polinomios. Prueba individual.

En esta etapa los estudiantes están más identificados con el tratamiento del registro geométrico y realizan conversiones entre uno y otro registro, es decir, que el proceso semiótico se está dando en sus procesos cognitivos de una manera consciente alcanzando a llegar a la objetivación de la factorización por medio del nuevo registro. Logran identificar las unidades figurales D1 y D2 entre las figuras de salida y el registro algebraico al realizar la conversión generando una mayor comprensión.

4.4. Fase 4. Orientación Libre.

Esta es una fase en la que se pretende extrapolar el conocimiento y validar la comprensión que los estudiantes han adquirido por medio del nuevo registro. Para ellos se plantearán dos actividades que requieren del dominio de las reglas de tratamiento en el registro geométrico y de la habilidad del estudiante para conjeturar y deducir.

En la actividad #1 se proponen tres polinomios cuadráticos que no tienen raíces enteras. Se pretende que el estudiante a partir de la experimentación llegue a esta conclusión. Y en la actividad # 2 se proponen dos expresiones factorizadas en variables distintas a x, con el fin de que el estudiante diseñe las figuras geométricas y las represente en el plano.

4.4.1. Actividad # 1. Factorización de Polinomios Con Raíces No Enteras.

Se organizan grupos de cuatro estudiantes y se les plantea la actividad de los siguientes tres polinomios que no tienen raíces enteras. Se pide que los factoricen por medio del registro geométrico.

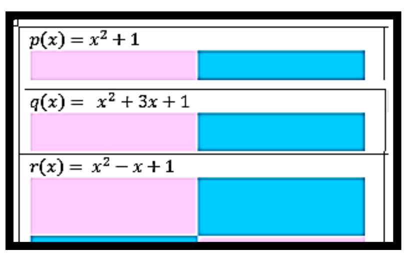


Ilustración 62. Ejercicio Orientación libre. Factorización de polinomios con raíces no enteras.

En esta actividad el docente está interactuando constantemente con los grupos para observar la evolución que han tenido.

Al respecto, se hacen las siguientes intervenciones con algunos grupos:

Grupo III

P: ¿Cómo van? Qué pasó que están como confundidos?

E-1: Es que nos ha dado x^2+x *y no* x^2+1*(*Ilustración 63*).*

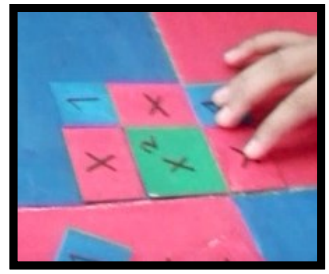


Ilustración 63. Resultados grupo III.

P: ¿Cómo están iniciando la factorización, qué se hace primero?

En ese momento empiezan a poner de nuevo las fichas en el plano para configurar el polinomio.

E-2: Hacer el rectángulo.

E-3: Completarlo.

P: Y ¿qué debe suceder cuando lo completan?

E-1: Deben quedar ceros algebraicos.

*E-3: No, no se puede. Porque no se pueden cancelar estos dos (*señalando dos fichas X en el cuadrante 2 y 4. Ilustración 64*). Eso era lo que le estaba diciendo a E-1 que no podían cancelar porque son del mismo cuadrante.*

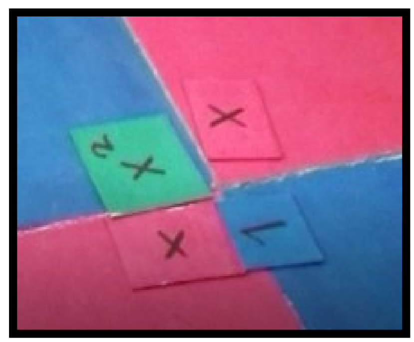


Ilustración 64. Resultado grupo III.

El estudiante E-2, configura nuevamente la fichas en otra posición (Ilustración 65)

E-2: Tampoco da.

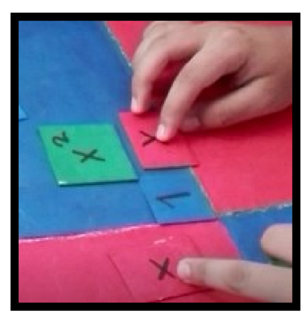


Ilustración 65. Resultado grupo III.

Grupo IV

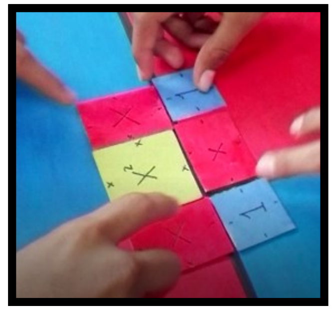


Ilustración 66. Resultado grupo IV.

P: ¿Ya hicieron el primero?

E-1: Ni por el uno ni por el otro

P: ¿Cómo así?

E-1: Ni algebraica ni gráficamente.

P: ¿Qué les pasó geométricamente?

*E-1: No encontramos cómo cancelar X con X (*refiriéndose a dos fichas X en cuadrantes del mismo signo*).*

P: ¿Qué organización hicieron?

E-2: Pues lo primero es $x^2 + 1$. *Y nos pusimos a completar (ponen* una ficha x en el cuadrante 2 y otra en el cuadrante 4*). Y pusimos este acá (*muestra una ficha X en el cuadrante 1 y una ficha 1 en el cuadrante 4) *para cancelar estos dos (*señala las fichas X en cuadrante 1 y 2*), pero también se tendrían que cancelar estos dos (*señala las fichas 1 en el cuadrante 3 y 4) (Ilustración 66).

P: Y ¿qué resultado les queda?

E-2: Quedaría x^2*-x, y es +1*

Otro estudiante mueve nuevamente las fichas y dice: No. Da lo mismo (Ilustración 67).

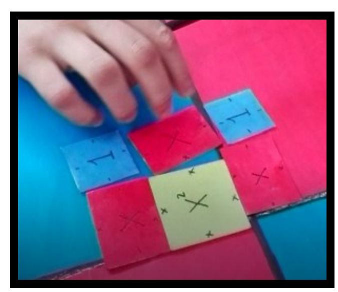


Ilustración 67. Resultado grupo IV.

P: Y algebraicamente ¿qué pasó estudiante E-3?

*E-3: Es que intento de que estos dos resultados (*señala la descomposición de x^2 en $x * x$ y de 1 en 1*1 por el método cruzado- Ilustración 68) al *multiplicarlos me dé cero, pero no me da, tendría que ser esta negativa (*señalando el signo de x^2), *necesito un +1x y un -1x para que me pueda dar cero, pero no es posible.*

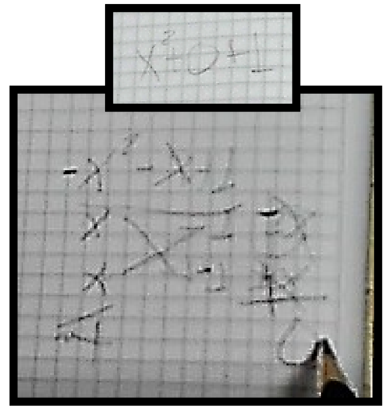


Ilustración 68. Resultado grupo IV

P: Ahh bueno intenten con otro polinomio

E-3: Ya lo había hecho (mostrando el polinomio x^2+3x+1*), pero, x por x y 1 por 1, más por más y más por más, multiplico en cruz y al sumarlo me da 2x, me falta una x.* (explica nuevamente el método cruzado para factorizar. Ilustración 69)

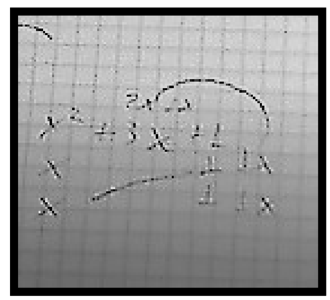


Ilustración 69. Resultado grupo IV

En general se nota que a nivel grupal existe una apropiación del registro geométrico y la mayoría de las reglas de tratamiento en el registro geométrico son claras y las comprenden, ya que argumentan y evidencian en el plano los procedimientos que realizan.

Al finalizar la actividad, cada grupo debe emitir unas conclusiones a partir de la experiencia realizada. Los resultados están registrados en la siguiente tabla:

Tabla 6. Conclusiones. Actividad 1 Orientación libre. Factorización de Polinomios con Raíces No Enteras.

GRUPO	CONCLUSIONES
1	Se nos dificulta comprobar las factorizaciones con la caja de polinomios.
2	No fuimos capaz de organizarlos en el plano, encontramos dificultades con los signos, los ceros algebraicos no se nos dieron.
3	No pudimos factorizar ningún polinomio ya que al parecer ***NO TIENE SOLUCIÓN***, porque las fichas faltantes daban un número impar, haciendo que nos sobrara o faltara un número.
4	***No existe una solución exacta o correcta del polinomio.*** No pudimos lograr que en el plano se cancelaran y algebraicamente no se pudo, por consiguiente no fue fácil la representación en el plano.
5	No fuimos capaces porque no nos daba de forma algebraica ni geométrica. Nos enredamos en la forma algebraica. Concluimos que en la búsqueda de factores hubo dificultad.
6	Nos fue difícil factorizar ya que no nos cuadraba al acomodar, tampoco nos daba con ceros algebraicos.
7	Lo que pasó es que no nos daba el encuadre para cancelar ceros y que nos diera el polinomio.

Esta actividad requiere de una concatenación de todos los procesos cognitivos que tiene un ejercicio geométrico. El estudiante debe configurar el polinomio dado, bajo las reglas de tratamiento orientadas; identificar unidades figurales D1 y D2 que hicieran posible la solución del problema y por último, a partir de la experimentación continua, deducir qué sucede con la factorización de esos polinomios, es decir, realizar todo un proceso de comprensión del registro en el cual está trabajando (Duval, 2001).

En las conclusiones de los estudiantes se evidencia la forma intuitiva en que dos de los grupos deducen que *no tiene solución o que no existe una solución exacta*, quiere decir, que es posible que en estos grupos los procesos cognitivos geométricos hayan alcanzado un buen nivel de desarrollo para alcanzar la comprensión del objeto matemático que se viene desarrollando.

A manera de conclusión general de la actividad, los estudiantes aplicaron de una manera adecuada las reglas de tratamiento del registro geométrico y algunos las del registro algebraico, ya que se observa que se expresan correctamente y utilizan vocabulario adecuado al momento de referirse a las dificultades que se presentaron al momento de factorizar los polinomios. Igualmente, evidencian conversiones desde lo algebraico a lo geométrico y viceversa.

4.4.2. Actividad # 2. Construcción geométrica de una factorización.

Con esta actividad se busca la extrapolación y razonamiento en la comprensión del registro geométrico con el uso indiferente de la variable, es decir, la apropiación que le ha dado el estudiante al uso de la variable como valor de una medida desconocida y su operabilidad en términos geométricos. Se proponen dos expresiones algebraicas y su factorización para que los estudiantes realicen la correspondiente representación en el plano.

$$Expresión\ 1: \quad a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$

$$Expresión\ 2: \quad m^2 + 2mn + n^2 = (m+n)^2$$

Se forman 10 grupos de tres estudiantes y se asigna a cada grupo una de las dos expresiones.

Analizando los resultados se obtiene que tres de los grupos realizan correctamente la actividad, mostrando habilidades al identificar las unidades figurales D1 y D2 de la expresión y configurando las mismas para realizar el encuadre y representar la factorización del polinomio.

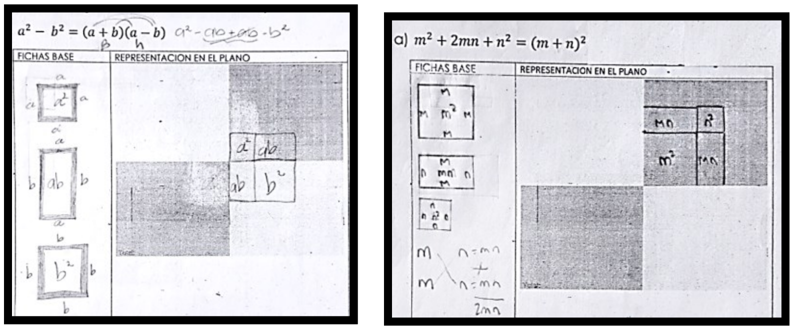
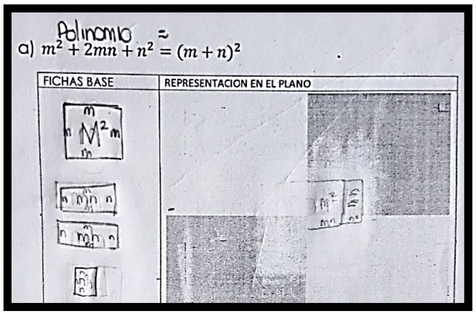


Ilustración 70. Actividad 2 Orientación libre. Desarrollo correcto.

En estos grupos además de que representan bien la factorización propuesta, realizan procedimientos algebraicos que les permiten validar el procedimiento hecho, esto muestra que hay comprensión en lo que están realizando y la fluidez que tienen para pasar de un registro al otro.

Un cuarto y quinto grupo diseñaron correctamente las fichas base, identificando sus unidades figurales D1 y D2. Al realizar la configuración del encuadre para representar la factorización, uno realiza bien la configuración pero no tuvieron en cuenta los signos de los cuadrantes para la lectura del polinomio y sus factores; el otro grupo hizo mal la configuración en plano. Se puede decir que no tuvieron en cuenta las reglas del tratamiento del registro geométrico.

El sexto grupo realiza la configuración en el plano de tal forma que su base y altura correspondan a los factores del polinomio, en lo cual evidenciaron que se centraron más en identificar sus unidades figurales D1 que en las D2, ya que omitieron el área de las fichas a^2 y b^2, pero la configuración hecha en el plano es correcta, lo cual evidencia que si hay comprensión en la conversión de registros que están realizando.



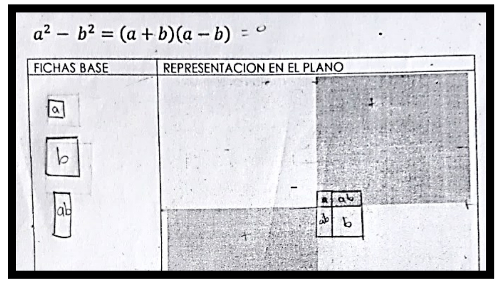
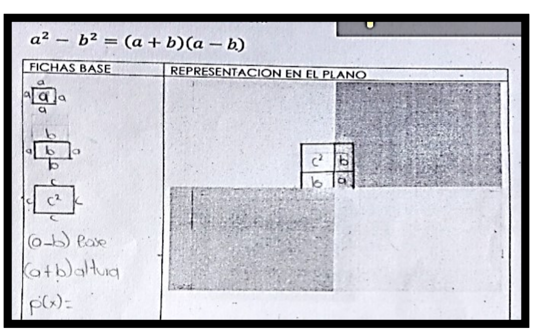


Ilustración 71. Actividad 2. Orientación libre. Desarrollo con algunas dificultades.

El séptimo grupo, igualmente se centró en identificar las unidades figurales D1 y representaron en el plano la factorización del polinomio, asegurando que la base y la altura fuera la correcta, pero omiten la identificación de las unidades figurales D2, entre las cuales representan una ficha c^2 en vez de b^2.

El octavo grupo diseña las fichas base, relativamente con sus unidades figurales D1 y D2 correctamente, pero son figuras desproporcionadas ya que las figuras cuyos lados son congruentes no tienen la misma dimensión en su frontera. Esta falta de visualización en la forma de las figuras y sus medidas hace que al representar la factorización del polinomio en el plano se generen dificultades en su configuración.



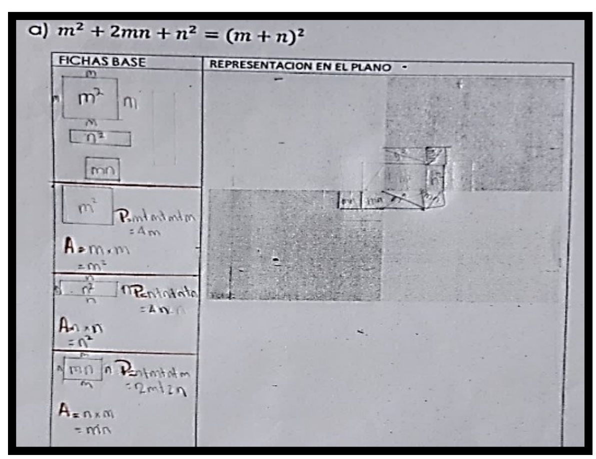


Ilustración 72. Actividad 2. Orientación libre. Desarrollo con dificultades.

Los dos grupos restantes, uno no termina la actividad y el otro diseña las fichas asignando valores numéricos a sus lados y a sus áreas, volviendo a la necesidad de asignar a la variable un valor para poder resolver la situación.

Finalizando esta fase podemos notar que los estudiantes prácticamente manejan un lenguaje y un vocabulario muy acorde con las situaciones que se plantean, son conscientes de los registros que manejan y realizan conversiones entre los mismos con más seguridad y fluidez

4.5. Fase 5. Integración.

En esta fase los estudiantes deben tener una visión general de lo que es una factorización en el registro geométrico y algebraico, sus estructuras mentales identifican en ambos registros el objeto matemático trabajado, el lenguaje en que se comunican es más fluido y estructurado de acuerdo con el nivel de comprensión que alcanzó a través de la secuencia aplicada.

Para comprobar el nivel de este proceso de comprensión se aplicó una prueba individual la cual permite analizar y validar el nivel de progreso que tuvieron los estudiantes. Las preguntas están enfocadas de la siguiente manera y codificadas con la letra mayúscula que aparece al frente como referencia en adelante:

Pregunta 1: (A) .Conversión geométrico- algebraico: a partir de la representación geométrica obtiene la expresión algebraica del polinomio factorizado y sus factores.

Pregunta 1: (B). Conversión en otras variables: a partir de una representación geométrica en variables no utilizadas en la Caja de Polinomios obtiene la expresión algebraica del polinomio factorizado y sus factores.

Pregunta 2: (C). Factorización con álgebra geométrica: conversión desde el registro algebraico al geométrico y del geométrico al algebraico.

Pregunta 3 y 6: (D). Factorización algebraica: resuelve usando técnicas o tratamientos algebraicos.

Pregunta 4: (E). Unidades D1 a partir de D1: identifica en representaciones geométricas unidades figurales D1 a partir de partir de unidades D1.

Pregunta 4: (F). Unidades D2 a partir de D1: identifica y halla en una configuración de áreas internas o subconfiguraciones con información de unidades D1, las unidades figurales D2.

Pregunta 4. (H). Perímetro con expresión algebraica: Halla el perímetro de una figura geométrica a partir de sus unidades figurales D1.

Pregunta 4. (I). Área total usando base por altura: halla el área de una configuración compuesta usando su base y altura.

Pregunta 4. (J). Área total usando áreas internas: halla el área de una configuración compuesta, a partir de la suma de sus subconfiguraciones internas.

Pregunta 5: (G). Unidades D1 a partir de D2: identifica y halla unidades figurales D1 a partir de una configuración de unidades figurales D2.

Para ello se implementó la misma rúbrica diseñada para el diagnóstico, con puntuaciones entre 1 y 4, así:

1. Deficiente: Se le dificulta resolver.
2. No muy bien: Resuelve con dificultad.
3. Muy bien: Resuelve con poca dificultad.
4. Excelente: Resuelve correctamente.

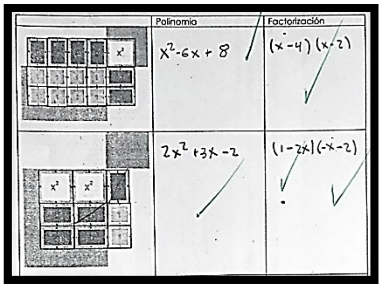
En los resultados que a continuación se registran el número de estudiante disminuyó a 29, ya que dos de ellos presentan inasistencias muy frecuentes y no presentaron todas las actividades de la secuencia.

Tabla 7. Promedio por Conceptos evaluados.

<table>
<tr><th>CONCEPTO</th><th>A</th><th>B</th><th>C</th><th>D</th><th>E</th><th>F</th><th>G</th><th>H</th><th>I</th><th>J</th></tr>
<tr><td rowspan="2">PROMEDIO</td><td rowspan="2">3,1</td><td rowspan="2">2,5</td><td rowspan="2">2,4</td><td rowspan="2">2,6</td><td rowspan="2">3,9</td><td rowspan="2">1,7</td><td rowspan="2">3,4</td><td rowspan="2">3,4</td><td>2,2</td><td>3,6</td></tr>
<tr><td colspan="2">2,6</td></tr>
</table>

Si hacemos énfasis en los procesos que requiere la actividad geométrica, se puede observar en la tabla 7 que el concepto A, conversión geométrico- algebraica, corresponde a un proceso de *visualización* en el que 62% de los estudiantes realizan de manera correcta la conversión del polinomio y su factorización (Ilustración 73)

En la categoría B, conversión en otras variables, se evidencia un proceso de *razonamiento* en el cual debe identificar factorizaciones haciendo uso de una variable distinta a la que se manejó durante la secuencia, la cual hizo correctamente el 52% de los estudiantes. (Ilusttración 73)



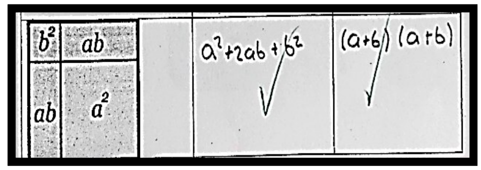


Ilustración 73. Respuesta E-10. Pregunta 1. Prueba Final.

Y el concepto C, factorización con álgebra geométrica, corresponde a un proceso de *construcción*, es decir, realizar la configuración del polinomio por ensamblaje de sus partes para llegar a su factorización, aquí el 41% de los estudiantes alcanza este nivel (Ilustración 74).

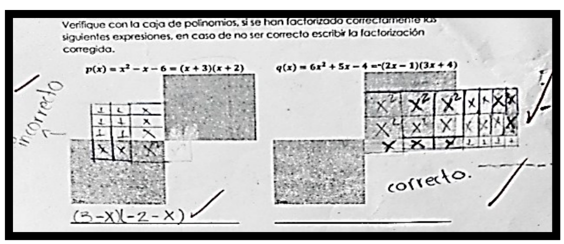


Ilustración 74. Respuesta estudiante E6. Pregunta 2. Prueba Final.

En estos conceptos se valida el hecho de que estos tres procesos cognitivos involucrados en situaciones cuyo registro es geométrico, no dependen el uno del otro y que el estudiante los puede interiorizar cada uno por aparte, sin embargo, quien domina los tres procesos simultáneamente, se puede afirmar que ha logrado alcanzar la comprensión del concepto matemático, en este caso, la factorización de polinomios en forma geométrica (Duval, 2001).

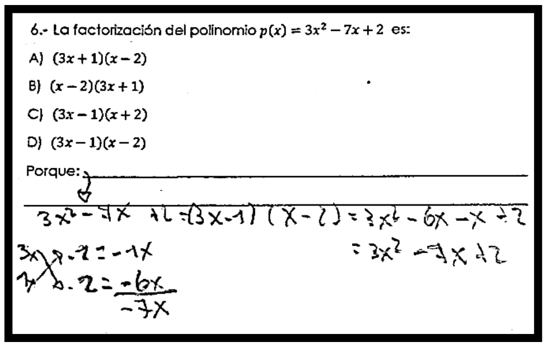
En la siguiente tabla se registra el número de estudiantes en cada escala de valoración por concepto.

Tabla 8. Resultados por conceptos y por escala de valorización.

	CONCEPTOS	ESCALA			
		4. EXCELENTE	3. MUY BIEN	2. NO MUY BIEN	1. DEFICIENTE
A	Conversión geométrico- algebraico	13	5	11	0
B	Conversión en otras variables	9	6	5	9
C	Factorización álgebra geométrica	8	4	8	9
D	Factorización algebraica	10	5	5	9
E	Unidades D1 a partir de D1	27	1	0	1
F	Unidades D2 a partir de D1	6	1	0	22
G	Unidades D1 a partir de D2	23	0	1	5
H	Perímetro expresión algebraica	20	4	3	2
I	Área: base por altura	2	3	3	13
J	Área: áreas internas	4	2	0	2

En esta tabla, se observa que la tendencia de mayor frecuencia se registra entre las valoraciones de "Muy bien" y "Excelente", caso contrario al diagnóstico aplicado al inicio de la secuencia didáctica.

Continuando con el análisis, en el concepto D, factorización algebraica, el 52% de los estudiantes se encuentra en valoraciones entre 3 y 4, es decir que a comparación del diagnóstico que sólo fue un 3% en este concepto, hubo un incremento muy representativo en el dominio del tratamiento en este registro, lo que lleva a pensar que el registro geométrico ha influido en forma muy positiva en este proceso. El 48% restante, aún presenta muchas dificultades en la validación de los procesos de comprobación y los métodos utilizados, presentándose errores en las operaciones con los signos y acomodación de la respuesta que quieren obtener (Ilustración 75).


6.- La factorización del polinomio $p(x) = 3x^2 - 7x + 2$ es:

A) $(3x+1)(x-2)$

B) $(x-2)(3x+1)$

C) $(3x-1)(x+2)$

D) $(3x-1)(x-2)$

Porque:

$3x^2 - 7x + 2 = (3x-1)(x-2) = 3x^2 - 6x - x + 2$

$= 3x^2 - 7x + 2$

$3x \cdot -1 = -1x$

$x \cdot 2 = -6x$

$-7x$

Ilustración 75. Respuesta estudiante E8. Pregunta 6. Prueba Final.

En los conceptos E (Unidades D1 a partir de D1) y H (Perímetro expresión algebraica) que corresponden a la identificación de unidades figurales D1 y expresiones algebraicas de segmentos y perímetro, se tiene un gran avance ya que entre el 69% y 93% de la población evidencia estar realizando de manera correcta el cambio dimensional a partir de una figura bidimensional, en la cual prevalecen las unidades figurales D2 sobre las D1, (Duval, 2001), además de estar evidenciando el uso correcto de la variable como medida y de realizar operaciones con ella. Sin embargo, aún se presentan errores de yuxtaposición y de clausura al realizar tratamientos algebraicos como son: $x + 2 = 2x$, de aquí que el perímetro lo expresan como $P = 2x + 2x + 2x + 2x$; $P = 2 + 2 + 2 + x + x + x = 9x$; $P = 4x + 8 = 12x$. (Ilustración 76)

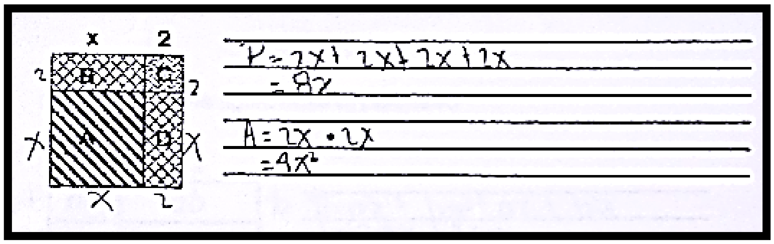


Ilustración 76. Respuesta estudiante E9. Pregunta 4. Prueba Final.

En los conceptos I (Área total usando base por altura) y J (Área total usando áreas internas) correspondiente a hallar el área total de un cuadrado compuesto por subfiguras internas, en el concepto J el promedio de 3.6 corresponde sólo a 8 estudiantes, pero éstos realizan en forma correcta el cambio dimensional hallando las áreas de las subfiguras que la componen a partir de unidades figurales D1 y hallan su área total, reconfigurando por ensamblaje las subfiguras halladas para dar origen a la figura de llegada. Mientras que en el concepto I el promedio de 2.2 corresponde a 21 estudiantes que hallan el área usando sus unidades figurales D1 de la base y la altura, presentando los mismos errores mencionados anteriormente de clausura, yuxtaposición y adicionalmente de propiedad distributiva y potenciación, como son:

$$A = 2x.2x = 4x^2 \quad ; \quad A = (x+2)(x+2) = x^2 + 4 \quad ; \quad A = (x+2).(x+2) = 4 + 2x$$

Sin embargo, el promedio entre los conceptos I y J es de 2.6, lo cual es representativo y muestra un cambio en los estudiantes al analizar una figura para hallar su área total.

En el concepto F, el cual corresponde a hallar unidades figurales D2 a partir de D1, tiene un promedio de 1.7 ya que sólo el 24% del total de los estudiantes visualizan y hallan las unidades D2. Este concepto está relacionado con el concepto J (Área total usando áreas internas), pues es necesario identificar las unidades D2 para hallar el área total por medio de sus sub-configuraciones. La mayoría de estudiantes optó por hallar el área total usando la multiplicación de la base por su altura, dado que era la información que se encontraba más explícita en la figura.

Esto quiere decir que esta operación visual de cambio de focalización 2D, no está muy desarrollada en los estudiantes, y como lo afirma Duval: "*cuando las unidades figurales de dimensión dos están separadas, su reconocimiento no tiene ninguna dificultad… No es lo mismo cuando esas unidades están integradas en una configuración…En primer lugar, ciertas unidades figurales de dimensión dos predominan sobre otras unidades también de dimensión dos. En segundo lugar, una figura geométrica contiene, con frecuencia, más unidades figurales elementales que las requeridas para construirlas*". (citado por Cuartas, 2017).

Finalmente en el concepto G (Unidades D1 a partir de D2) se presenta con un promedio de 3,4 ya que un 79% identifican correctamente la unidades D1 a partir de unidades D2 (Ilustración 77), es decir, que la mayoría de estudiantes logró desarrollar este proceso de visualización a pesar que en sentido contrario no se desarrolló en la misma proporción como se mencionó en el párrafo anterior. Igualmente, se evidencia la forma en que ha evolucionado la comprensión del uso de la variable como medida en dichas figuras geométricas.

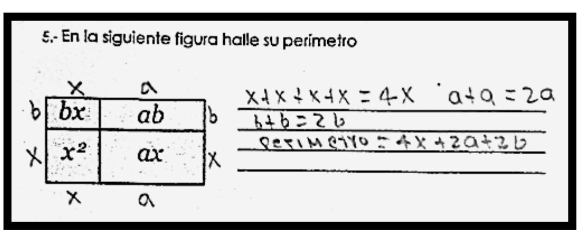


Ilustración 77. Respuesta estudiante E . Pregunta 5. Prueba Final.

En cuanto al vocabulario adquirido, en las justificaciones verbales, se nota una mayor fluidez cuando se refieren al proceso de la factorización, expresándose en términos de encuadre minimal o rectangular, ceros algebraicos, factores, base y altura, y que argumentan cuando la organización de las fichas no es una factorización, explican la relación entre la configuración total del polinomio con las áreas de las figuras que la componen, es decir con las unidades figurales D2 y de igual manera su factores con las unidades figurales D1.

El estudiante E20 (Ilustraciones 78) evidencia en las actividades haber desarrollado los tres procesos cognitivos de visualización, construcción y razonamiento necesarios para ser competente geométricamente, simultáneos con la *noesis* del objeto matemático, es decir, la articulación de los dos sistemas de representación, realizando conversiones entre ambos registros. Además, el uso adecuado del vocabulario al momento de justificar verbalmente sus procesos.

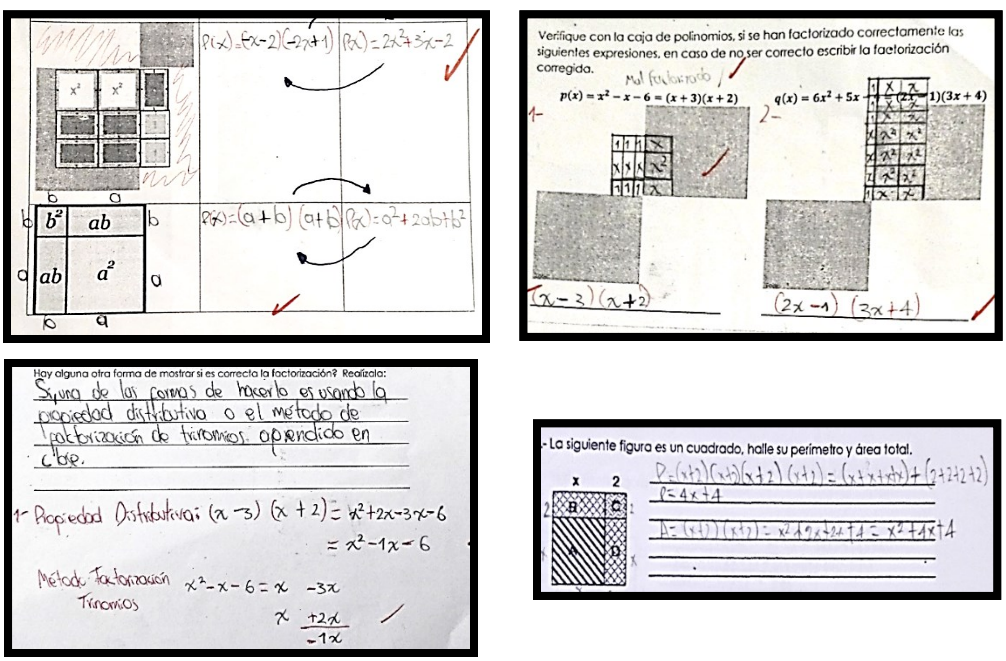


Ilustración 78. Fase de Integración. Resultados estudiante E20.

Al analizar los resultados de la estudiante E17 (Ilustraciones 79), y nuevamente citando a Radford (Socas, 2011a) , "*el alumno realiza actividades de conversión de un sistema de representación semiótico a otro; en estas actividades de conversión hay un sistema que el alumno controla y facilita la conversión al otro",* no obstante, en este grupo de estudiantes aún se presentan dificultades de tratamiento en ambos registros y fluidez verbal.

A pesar de que identifica bien las gestalt 1D y 2D, pierde la visualización de los signos en los ejes y en los cuadrantes al realizar las conversiones en ambos registros.

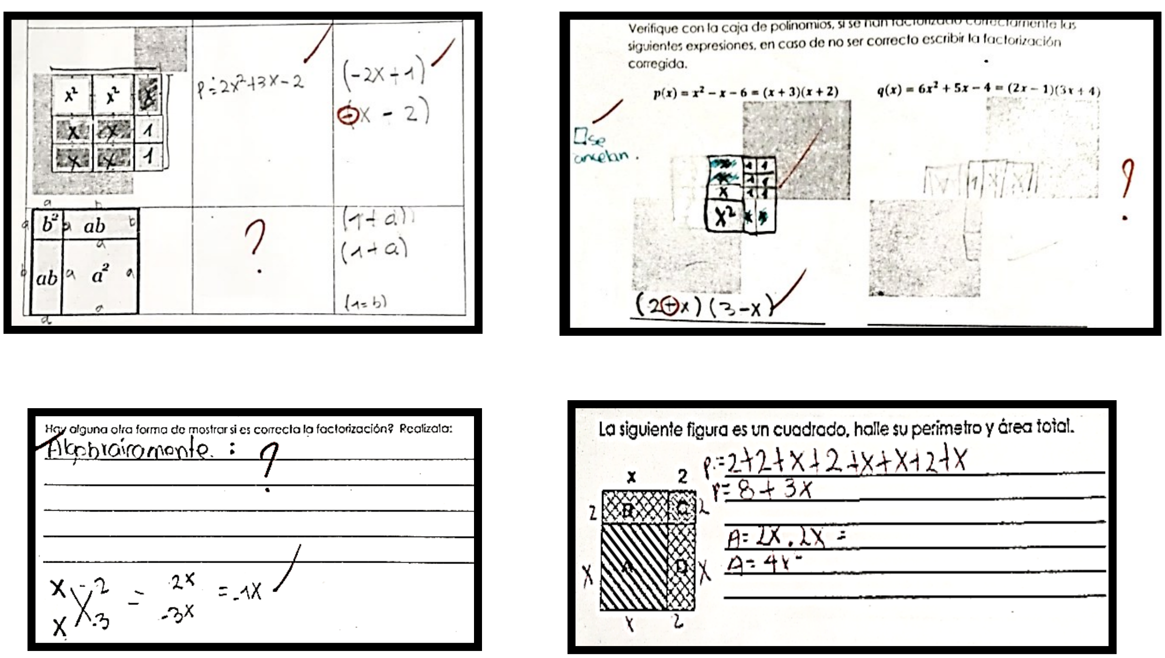


Ilustración 79. Fase de Integración. Resultados estudiante E17.

Finalmente, se identifica en el trabajo del estudiante E24 (Ilustraciones 80) dificultades en todos los procesos cognitivos de visualización, construcción y razonamiento. En la clasificación dada por Radford, son alumnos que tienen ideas imprecisas sobre el objeto matemático y mezclan de forma incoherente diferentes representaciones semióticas.

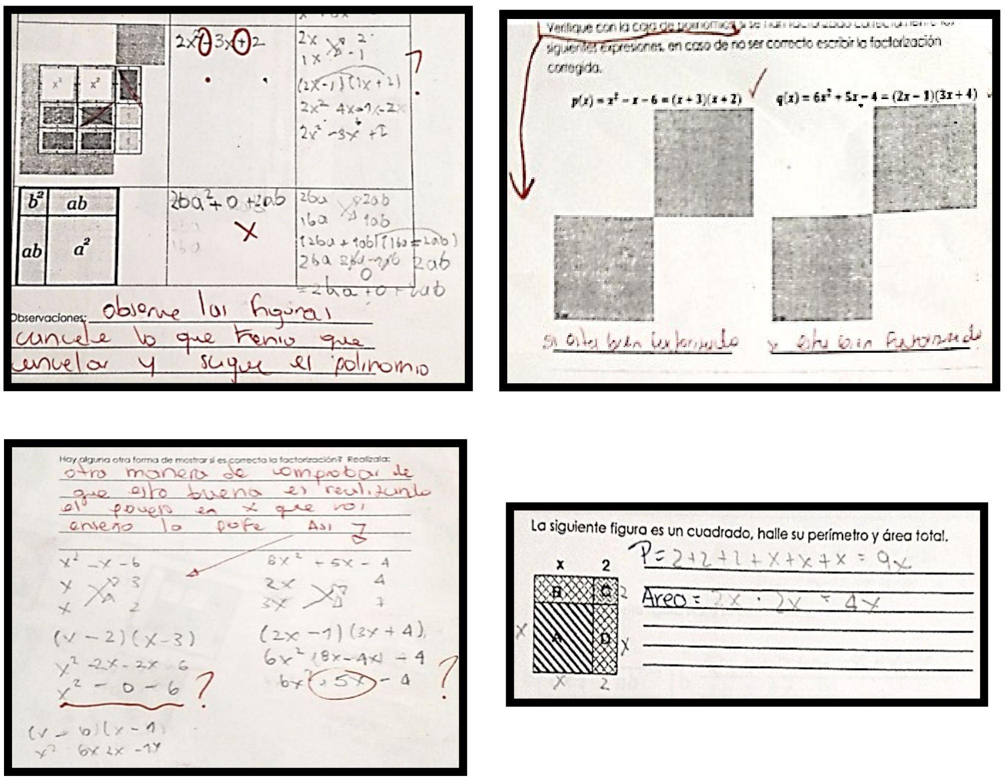


Ilustración 80. Fase de Integración. Resultados estudiante E24.

Por último se registra en la siguiente tabla los resultados de las valoraciones por estudiante, por concepto y sus promedios:

Tabla 9. Resultados por estudiante, por conceptos y promedio individual.

ESTUDIANTE No.	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	PROMEDIO
1	2	1	1	1	4	1	4	4	2		2,2
2	4	4	4	4	4	1	4	3	2		3,3
3	2	2	1	1	3	1	4	2	2		2,0
4	4	1	3	1	4	1	4	4	2		2,7
5	4	3	4	4	4	1	4	4	3		3,4
6	4	1	4	1	4	1	1	4	2		2,4
7	3	2	2	1	4	4	4	4		3	3,0
8	4	4	4	4	4	4	4	4		4	4,0
9	2	1	1	4	4	1	4	3	2		2,4
10	4	4	4	4	4	4	4	4	4		4,0
11	2	3	1	4	4	1	4	3	3		2,8
12	4	4	4	4	4	1	4	4	3		3,6
13	3	3	2	1	4	4	4	4		4	3,2
14	3	3	2	3	4	1	4	4	1		2,8
15	4	4	4	4	4	4	4	2		4	3,8
16	4	3	2	2	4	4	4	3		3	3,2
17	3	1	3	3	4	1	4	4	2		2,8
18	2	2	1	1	4	1	1	4	3		2,1
19	2	1	1	4	4	3	4	4		4	3,0
20	4	4	4	4	4	1	4	4	4		3,7
21	2	2	1	1	1	1	1	1		3	1,4
22	2	1	1	3	4	1	4	4	2		2,4
24	2	2	2	2	4	1	2	2	2		2,1
25	2	1	2	1	4	1	1	4	2		2,0
26	4	4	3	3	4	1	4	1	1		2,8
27	4	4	2	2	4	1	4	4	3		3,1
28	2	1	1	2	4	1	1	4	2		2,0
30	3	3	3	3	4	1	4	4	1		2,9
31	4	4	2	2	4	1	4	4	1		2,9

Se puede apreciar que el 41% del grupo (resaltados en gris oscuro), tienen un promedio entre 3 y 4, valoraciones entre *Muy bien y Excelente*, es decir, son los estudiantes que alcanzaron la *noesis* en el proceso de la secuencia para lograr la comprensión en la factorización de polinomios. Según Radford (Radford, et al, 2011) , en su clasificación de acuerdo a los estadios de desarrollo, serían estudiantes que articulan dos sistemas de representación semióticos y pueden tomar cualquiera de ellos para significar correctamente el objeto matemático independientemente del otro.

De igual manera, hay un 24% del grupo (resaltados en gris claro) que avanzaron bastante en este proceso de llegar a la *noesis*, con promedios entre 2.7 y 2.9, es decir muy cerca de estar en el rango de valoración *Muy bien.*

El 35% restante del grupo se encuentran aún en la etapa de tratamiento y requieren retomar las fases 3 y 4, como lo proponen los esposos Van Hiele en su metodología (Bedoya et al., 2007).

Al realizar este análisis final y confrontando con el diagnóstico realizado en la primera fase, se puede afirmar que a nivel grupal e individual se evidencian avances significativos en los procesos de comprensión del objeto matemático trabajado.

Así mismo, se identifica que a partir de las experiencias de aprendizaje desarrolladas, los estudiantes van adquiriendo el vocabulario propio del objeto de estudio y que el diseño instruccional por medio de las fases, les brinda herramientas que les permiten potenciar la utilización del lenguaje y su razonamiento.

El registro geométrico fue y será de gran ayuda para continuar en el proceso de alcanzar la *noesis* con los estudiantes que aún no lo han logrado, retomando las fases anteriores e identificando en sus estructuras mentales, cuáles son los obstáculos que no han hecho posible la correcta formación del nuevo registro, como también su tratamiento y conversión.

Capítulo V

Conclusiones y Recomendaciones

Una vez terminada la secuencia didáctica y el análisis de los resultados, se presentan las conclusiones y sugerencias sobre los objetivos del proyecto y las preguntas planteadas al problema. Así mismo, emergen algunas proyecciones.

5.1.Conclusiones por objetivos específicos.

5.1.1. Primer objetivo específico.

"*Identificar en los estudiantes, los conocimientos previos que poseen en el proceso de factorización de polinomios de hasta segundo orden, por medio de una prueba diagnóstica*"

Frente a una prueba de conocimientos básicos sobre factorización numérica, algebraica y geométrica, la mayoría de los estudiantes presentan una tendencia a manejar de forma más adecuada el registro aritmético que el algebraico y geométrico. Sin embargo, el significado de algunas de estas operaciones numéricas es sólo algorítmico porque carecen de estrategias al ponerlas en juego en la solución de un problema específico. No relacionan el concepto de descomposición factorial de un número entero con el concepto de factorización de un polinomio.

Hay desconocimiento frente al concepto de variable y sus diferentes usos y por ende presentan dificultades al realizar tratamientos en el registro algebraico. Además se identifican errores en conceptos básicos geométricos como son el perímetro y área de figuras básicas como cuadrados y rectángulos y su relación con las expresiones algebraicas.

De allí que se evidencia un trabajo muy superficial en los procesos de visualización, que no permiten al estudiante realizar construcciones y hacer inferencias a partir de situaciones geométricas planteadas.

5.1.2. Segundo objetivo específico.

"Lograr que los estudiantes adquieran un dominio de dos o más registros de representación en el proceso de factorización que los vincule a la comprensión del concepto, por medio de las actividades cognitivas: formación, tratamiento y conversión, mediante secuencias didácticas"

Al trabajar con dos referentes teóricos como lo son las teorías de Duval y Van Hiele, se ha logrado implementar una combinación muy acertada para inducir en los estudiantes el manejo de los registros algebraico-geométrico y lenguaje natural. Se logra consolidar las secuencias didácticas de cada fase con las actividades cognoscitivas de formación, tratamiento y conversión para generar el proceso semiótico de la factorización y alcanzar estados de *noesis* en gran parte de los estudiantes. La etapa de formación del nuevo registro (geométrico) por medio de la identificación de perímetros y áreas de las figuras básicas usadas (cuadrados y rectángulo), fue fundamental para inducir el concepto de variable ya que se desarrolla en el estudiante la habilidad de usar la variable como valor desconocido en la medida de una figura geométrica y operar con ellas al hallar perímetros y áreas, y a la vez establece la congruencia entre los registros geométrico y algebraico; esta secuencia de actividades permitió fortalecer los procesos de visualización, construcción y razonamiento en actividades de raciocinio geométrico.

5.1.3. Tercer objetivo específico.

"Validar o evaluar la propuesta didáctica por medio de una prueba de conocimiento que permita identificar el nivel de comprensión alcanzado"

Cuando un estudiante da cuenta de los procesos que está realizando y tiene la capacidad de realizar conversiones de un registro a otro en forma espontánea damos por entendido que se ha producido la noesis esperada del objeto matemático trabajado, el cual le permite desarrollar competencias de razonamiento, comunicación y solución de problemas en contextos geométricos y matemáticos.

Es así como gran parte de los estudiantes al terminar las secuencias didácticas, validaron y demostraron tener estos componentes que permiten afirmar que comprenden la factorización de polinomios cuadráticos usando el registro geométrico y algebraico, además de desarrollar las habilidades en el manejo de situaciones geométricas.

5.2.Conclusiones por objetivo General.

“Potenciar en el estudiante la comprensión de la factorización de polinomios por medio del manejo de varios registros de representación usando el álgebra geométrica con recursos didácticos visuales y concretos”

Con la consecución en general de los objetivos específicos, podemos afirmar que se ha cumplido con el objetivo general, es decir, que por medio de secuencias didácticas orientadas bajo la metodología de Van Hiele se pudo lograr que gran parte de los estudiantes alcanzaran la *noesis* del concepto de factorización por medio del dominio del registro geométrico y algebraico, al realizar conversiones de entre ambos sin que se modifique el concepto del objeto matemático en sí.

5.3.Conclusiones a las preguntas del problema.

Es prudente dar respuesta a aquellas preguntas que se formularon al inicio de este trabajo ya que fueron las que impulsaron el desarrollo de cada una de las fases investigativas en busca de sus respuestas.

5.3.1. ¿Es posible por medio de un nuevo registro, como el álgebra geométrica, potenciar la comprensión de la factorización de polinomios en estudiantes de grado noveno?

Con el registro geométrico cobra sentido el tratamiento algebraico y se superan algunas dificultades al establecer equivalencias entre una expresión algebraica y sus factores. Fue más fácil identificar términos semejantes al simplificar una expresión por medio de los colores de los cuadrantes en el plano cartesiano que los caracterizaban entre positivos y negativos. El estudiante se siente más seguro al hacer conversiones de lo geométrico a lo algebraico porque visualmente comprende el porqué del resultado que está obteniendo.

Como en todo proceso cognitivo, al igual que en el registro algebraico, también se presentan errores en los procesos geométricos, fundamentados en problemas de visualización, construcción y razonamiento a partir de las configuraciones 2D. Sin embargo, al contar con dos registros de representación, es más fácil validar los conocimientos confrontando el uno con el otro.

5.3.2. ¿Qué habilidades desarrollan los estudiantes al dominar dos o más sistemas de representación de un objeto matemático?

El registro geométrico en particular permite desarrollar los procesos de visualización, construcción y razonamiento que conlleva una actividad geométrica como son la identificación de la *gestalt* en una figura bidimensional, la configuración por medio de operaciones visuales como traslaciones y rotaciones, la comunicación al momento de dar cuenta del proceso realizado y su validación en lenguaje natural.

Desarrolla la creatividad y estrategias de solución al momento de realizar configuraciones bajo condiciones específicas de polinomios cuadráticos.

5.4.Conclusiones Generales del Proyecto de Investigación.

Una vez realizado el análisis sobre las concepciones algebraicas de estudiantes de grado noveno de la Institución Educativa INEM Felipe Pérez de Pereira, en lo referente al tratamiento algebraico y geométrico, se pudo determinar la necesidad de una intervención que les permitiera mejorar sus habilidades al momento de hallar expresiones algebraicas equivalentes en la factorización de polinomios cuadráticos, debido a esto, se ha propuesto la implementación del álgebra geométrica con la herramienta “La Caja de Polinomios”.

Es importante resaltar, que la forma convencional de abordar la factorización de polinomios se basa en extensos talleres en los cuales el estudiante debe identificar casos particulares a aplicar que por lo general confunde y genera en ellos estados de desasosiego, provocando que pierdan el interés en este tipo de ejercicios. Teniendo en cuenta este aspecto, se planteó en la presente propuesta, una secuencia didáctica que les permitiera, desarrollar las habilidades necesarias para mejorar la comprensión al factorizar polinomios cuadráticos.

Del diagnóstico realizado al grupo en estudio nace la premisa que los estudiantes presentan dificultades en el tratamiento del registro algebraico y otro tanto demuestran apatía por el álgebra en general. Sin embargo, al ir avanzando en las fases y secuencias propuestas, mostraron gran interés y creatividad al momento de trabajar las actividades planteadas, de lo que se infiere que necesitaban un ambiente diferente y otras metodologías más estimulantes y motivadoras orientadas por el docente, además de herramientas que potenciaran sus capacidades innatas.

El grupo de estudiantes en general, como lo muestran los resultados finales, mejoraron notablemente en sus procesos de comprensión en la factorización de polinomios y en el uso de la variable. Esto se logró mediante la incorporación de estrategias como lo son: el trabajo colaborativo, la participación y la motivación; lo que les facilitó adquirir el dominio de ciertos elementos tanto en el registro algebraico como en el geométrico.

Por otro lado, aspectos como el tiempo, inasistencias de algunos estudiantes, falta de compromiso de algunos en las actividades, generaron que en su totalidad el grupo no alcanzara todos los objetivos planteados. Es de resaltar que el buen manejo del docente de los temas, las asesorías adicionales y el acompañamiento constante de éste en el proceso, ayudó a disminuir las dificultades que podrían presentarse a nivel individual.

Esta experiencia genera la necesidad de crear espacios de reflexión pedagógica con docentes de matemáticas de las instituciones educativas, en las cuales a futuro la propuesta se pueda extender a los estudiantes de los diferentes grados escolares.

5.5.Recomendaciones.

- Es importante que el docente conozca el origen, la evolución y los procesos semióticos que ha tenido en la historia el objeto matemático permitiéndole tener herramientas de apoyo en el aula.
- Los proyectos de investigación que se desarrollan en didáctica de la matemática deben ser insumo fundamental para que el docente evalúe sus prácticas y ponga en práctica las

experiencias que profesionales en la educación han validado en procesos de enseñanza-aprendizaje con diferentes objetos matemáticos.

- En las instituciones educativas, el aula debe de ser una constante de investigación, que permita proponer e implementar estrategias didácticas que las lleve a mejorar sus propios fenómenos educativos.
- El material que se trabajó en esta secuencia didáctica fue en una sola variable y dos dimensiones, pero se puede desarrollar en dos, tres y más variables y hasta tres dimensiones en forma geométrica. Esta sería una manera de darle continuidad a los conceptos de extrapolación y comprensión de expresiones algebraicas en más de una variable.
- Es aconsejable utilizar el material desde niveles de la básica secundaria y con algunas orientaciones especiales en la básica primaria, con el fin que el registro geométrico se convierta en un lenguaje más de los que están acostumbrados a manipular como por ejemplo, el registro numérico.
- Con las nuevas políticas de inclusión, el material concreto es una excelente herramienta para desarrollar secuencias didácticas con estudiantes visualmente discapacitados.

5.6.Proyecciones.

La implementación del álgebra geométrica con la herramienta "La Caja de Polinomios" ha evidenciado ser una estrategia que facilita y acerca a los estudiantes al proceso de comprensión del concepto de variable y del tratamiento algebraico, en especial la factorización de polinomios, mostrando más agrado y participación al momento de realizar las actividades. Debido a esto se proponen las siguientes proyecciones:

- Socializar el proyecto con todos los docentes y directivos de la Institución Educativa INEM Felipe Pérez de Pereira para que pueda ser adaptado y aplicado a estudiantes de otros grados.
- Articular la propuesta con proyectos de matemáticas de la institución educativa INEM Felipe Pérez que se puedan incluir posteriormente en el Proyecto Educativo Institucional.
- Implementar en la institución educativa INEM Felipe Pérez un laboratorio o semillero de matemáticas, como una estrategia de enseñanza y aprendizaje que le permita a los estudiantes descubrir, relacionar, aplicar y construir su aprendizaje por medio del uso de material manipulativo o virtual.
- Promover en la institución educativa INEM Felipe Pérez, grupos de investigación al interior de cada una de las disciplinas, que permita proponer e implementar estrategias didácticas que nos lleve a mejorar nuestros propios fenómenos educativos.

Referencias bibliográficas

Amore, B. D. (2004). La complejidad de la noética en matemáticas como causa de la falta de devolución. *Uno*, *35*, 90–106.

Ballén, J. O. (2012). *El álgebra geométrica como recurso didáctico para la factorización de polinomios de segundo grado*. Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, Colombia. Retrieved from http://www.bdigital.unal.edu.co/8063/

Bedoya, J. A., Esteban, P. V., & Vasco, E. D. (2007). Fases de aprendizaje del modelo educativo de van Hiele y su aplicación al concepto de aproximación local. *Lecturas Matemáticas Volumen*, *28*, 77–95.

Bisquerra A., R. (2004). *Metodología de la investigación cualitativa*. (La Muralla, Ed.). Madrid, España.

Butto, C., & Rojano, T. (2004). Introducción temprana al pensamiento algebraico : abordaje basado en la geometría. *Educación Matemática*, *16*(1), 113–148.

Cabello, A. (2013). *La Modelización de Van Hiele en el Aprendizaje Constructivo de la Geometría en Primero de la Educación Secundaria Obligatoria a partir de Cabri*. Universidad de Salamanca, España.

Cerda-Morales, G. (2011). Raymond Duval "Semiosis y Pensamiento Humano." Retrieved July 2, 2011, from http://www.monografias.com/trabajos87/registros-semioticos-duval/registros-semioticos-duval.shtml

Cerdán, F. (2010). Las igualdades incorrectas producidas en el proceso de traducción algebraico: un catálogo de errores. *PNA*, *4*(2010), 99–110.

Cuartas, C. (2017). *Aprendizaje de los Productos Notables en el Contexto del Álgebra*

Geométrica, desde los Registros de Representación Semiótica y Secuencias Didácticas de Enseñanza. Universidad del Quindío, Quindío, Colombia.

De Nápoli, P. (2014). Polinomios. Retrieved from mate.dm.uba.ar

Duval, R. (1991). Un análisis de los problemas cognitivos de comprensión en el aprendizaje de las matemáticas, 233–261. Retrieved from https://upeldem.files.wordpress.com/2017/04/duval-1-151.pdf

Duval, R. (1996). SEMIOSIS EN EL PTO HUMANO- DUVAL.pdf.

Duval, R. (1999). Representation, Vision and Visualization: Cognitive Functions in Mathematical Thinking. Basic Issues for Learning. *Twenty First Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, *25*(1), 3–26. https://doi.org/10.1076/noph.25.1.3.7140

Duval, R. (2001). La Geometría desde un Punto de Vista Cognitivo. *Pmme-Unison*, 1–12. Retrieved from http://fractus.uson.mx/Papers/ICMI/LaGeometria.htm

Duval, R. (2006). Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación. *La Gaceta de La Real Sociedad Matemática Española*, *9*, 143–168. Retrieved from http://cmapspublic.ihmc.us/rid=1JM80JJ72-G9RGZN-2CG/La habilidad para cambiar el registro de representaci?n.pdf

Garcia, J. (2017). *Cálculo de Estados Ligados y Resonancias de Sistemas de Interés Fisicoquímico*. Universidad Nacional de la Plata, Argentina.

Godino, J. D., & Font, V. (2003). *Razonamiento algebraico y su didáctica para maestros*. *Matemáticas y su didáctica para maestros*.

Hesselbart, A. (2007). Mathematical reasoning and semiosis: a theoretical analysis of didactical challenges in learning to prove, (4). Retrieved from http://www.ind.ku.dk/publikationer/studenterserien/studenterserie4/thesisery5-medbundtekstmedforside.pdf

Katz, V. J., & Barton, B. (2007a). Stages in the history of algebra with implications for teaching. *Educational Studies in Mathematics*, *66*(2), 185–201. https://doi.org/10.1007/s10649-006-9023-7

Katz, V. J., & Barton, B. (2007b). Stages in the history of algebra with implications for teaching. *Educational Studies in Mathematics*, *66*(2), 185–201. https://doi.org/10.1007/s10649-006-9023-7

Kline, M. (1972). *El pensamiento matemático de la antigüedad a nuestros dias*. (A. Editorial, Ed.), *Talleres Estudiantiles. Ciencias UNAM* (Vol. 1, 2, y 3).

Marmolejo-Avenia, G. A., Guzmán, L. Y., & Insuaty, A. L. (2016). Introducción a las fracciones en textos escolares de educación básica ¿figuras representaciones estáticas o dinámicas? - Introduction to fractions in textbook of Basic Education. Figures Dinamic or static representations? *Revista Científica*, *3*(23), 43. https://doi.org/10.14483/udistrital.jour.RC.2015.23.a4

Marmolejo, G. A., & González, M. T. (2013). Visualización en el área de regiones poligonales . Una metodología de análisis de textos escolares. *Educación Matemática*, *25*, 61–102.

MEN. (1998). Lineamientos Curriculares de Matemáticas. *Cooperativa Editorial Magisterio*, 103.

MEN. (2006). Estándares Básicos de Competencias en lenguaje, matematicas, ciencias y ciudadanas. *Revolución Educativa*, (3), 1–184. https://doi.org/958-691-290-6

MEN. (2016). Siempre Día-e La ruta hacia la excelencia educativa. Derechos básicos de Aprendizaje. Retrieved from http://www.colombiaaprende.edu.co/html/micrositios/1752/articles-349446_genera_dba.pd

Ministerio de Educación Nacional. (2006). Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas. *Estándares Básicos de Competencias En Lneguaje, Matemáticas, Ciencias Y Cuidadanas*, 46–95.

Mir Sabaté, F. (2005). El Teorema Fundamental del Algebra, (April), 1–11.

Morales, I., & Sepúlveda, A. (1999). Propuesta para la enseñanza de la factorización en el curso de álgebra. *XIV Encuentro de Profesores de Matemáticas*, 85–108.

Olave, T. M., Luis, L., & Martínez, C. (2008). Dificultades en la práctica de productos notables y factorización. *Revista Del Instituto de Matemática Y Física*, 59–69.

Palarea, M. (1998). *La adquisición del lenguaje algebraico y la detección de errores comunes cometidos en álgebra por alumnos*. Universidad de la Laguna, San Cristóbal de la Laguna, España.

Palarea, M., & Socas, M. (1994). Algunos Obstáculos Cognitivos En El Aprendizaje Del Álgebra. *I Seminario Nacional Sobre Lenguaje Y Matemáticas*, 91–98. Retrieved from http://revistasuma.es/IMG/pdf/16/091-098.pdf

Puig, L. (1998). Componentes de una historia del álgebra. El texto de Al-Khwârismî restaurado. *Investigaciones En Matemática Educativa II.*, 109–131. Retrieved from http://www.euclides.org/menu/articles/article7.htm%5Cnhttp://files/74/Componentes_historia_algebra.pdf

Puig, L. (2003). Historia de las ideas algebraicas: componentes y preguntas de investigación desde el punto de vista de la matemática educativa. *Séptimo Simposio de La Sociedad Española de Investigación En Educación Matemática*, (regla VII).

Radford, L. (2006). Algebraic Thinking and the Generalization of Patterns: A Semiotic

Perspective. *28th Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, *1–21*(March 1987), 2–21.

Ruano, R. M., Socas, M., & Palarea, M. (2008). Análisis y Clasificación de Errores Cometidos por Alumnos de Secundaria en los Procesos de Sustitución Formal, Generalización y Modelización en Álgebra. *Pna*, *2*(2008), 61–74.

Ruiz, A. (2003). *Historia y filosofía de las Matemáticas*. Costa Rica: Editorial Universidad Estatal a Distancia.

Ruiz, C. (n.d.). LEMA DE BEZOUT. TEOREMA DE FACTORIZACION UNICA. In *APUNTES AM* (pp. 1–4). Madrid, España: Universidad Complutense de Madrid.

Salazar, V., Jiménez, S., & Mora, L. (2013). Tabletas algebraicas, una alternativa de enseñanza del proceso de factorización. *I Congreso de Educación Matemática de América Central Y Del Caribe*, 11.

Salazar Cruz, L. M. (2009). *Teorema Fundamental Del Ágebra Y Sus Diferentes Demostraciones*. Retrieved from http://repository.javeriana.edu.co/bitstream/10554/8596/1/tesis555.pdf

Sandoval, Y. (2010). *Las representaciones geométricas como herramienta para la construcción del significado de expresiones y operaciones algebraicas, desarrollado con alumnos de octavo grado del instituto "San José del Pedregal."* Universidad Pedagógica Nacional "Francisco Morazán", Tegucigalpa, Honduras.

Sessa, C. (2005). *Iniciación al estudio didáctico del álgebra*. (O. Kulesz, Ed.) (1a. Edició). Buenos Aires, Argentina: Libros del Zorzal.

Socas, M. (2011a). Generalization of Patterns: The tension between algebraic thinking and algebraic notation. *Proceedings of the 35th Conference of the International Group for the*

Psychology of Mathematics Education, *1*(2007), 379–402. https://doi.org/10.1023/A:1020291317178

Socas, M. (2011b). La enseñanza del Álgebra en la Educación Obligatoria. Aportaciones de la investigación. *Números*, *77*, 5–34. Retrieved from http://www.sinewton.org/numeros/

Soto, F., Mosquera, S., & Gómez, C. (2005). La caja de polinomios. *Escuela Regional de Matemáticas, Universidad Del Valle*, *XIII*(1), 83–97.

Universidad Nacional de San Juan, U. (n.d.). Unidad 5: Polinomios. In *Facultad de Ingeniería - UNSJ- Curso de Ingreso* (pp. 95–116).

Valdivé, C., & Escobar, H. (2011). Estudio de los Polinomios en Contexto. *Revista Paradigma*, *XXXII*, 85–106.

ANEXOS

Anexo A. Operaciones visuales y su relación con la actividad semiótica. Fuente: Adaptación (Cuartas, 2017) y (Marmolejo & González, 2013).

Tipo de Operación Visual y definición	Clase y Definición	Tipo de aprehensión visual	Actividad semiótica
Operación: las figuras permiten distintos tipos de modificaciones, por cada modificación existen varias operaciones cognitivas que brindan a las figuras su productividad heurística	***Configuración:*** alude al ensamblaje de un conjunto de figuras independientes entre sí para representar una nueva, cuya superficie está compuesta por la unión de las superficies de las figuras dadas ***Configuración simple:*** Son varias las figuras de partida y su ensamblaje genera una nueva figura. No todas las figuras representadas tienen igual forma y magnitud.	Operatoria	Formación y tratamiento

	Traslación: la figura de llegada es una imagen de la figura de partida mediante la aplicación de desplazamientos verticales, horizontales o de composiciones entre ellos. La forma, la cantidad de área y las relaciones existentes entre las unidades constituyentes se conservan.	Operatoria	Formación y tratamiento
	Rotación: la figura de llegada es una imagen de la figura de inicio mediante la aplicación de un giro o una composición de giros (rotación en el plano)	Operatoria	Formación y tratamiento

	Fraccionamiento: descomposición bidimensional de una figura en subfiguras o subconfiguraciones. Este tipo de operaciones está presente en tareas donde se solicita transformar una figura en otra de contorno distinto e igual área, dividir la cantidad de área de una figura en partes iguales y calcular el área de figuras irregulares mediante la aplicación de fórmulas de área básicas. ***Fraccionamiento simple***: se solicita dividir la superficie de la figura de partida en partes previamente determinadas o sin determinar. ***Refraccionamiento*****:** cuando es necesario resaltar algunas de las líneas en que inicialmente está descompuesta la figura en estudio y que inducen discriminar en ella nuevas subfiguras	Operatoria	Formación y tratamiento

Cambio figural: efecto que produce en una configuración geométrica la aplicación de acciones que transforman su organización perceptual y determinan la naturaleza de la aprehensión operatoria.	***Real:*** es un tipo de modificación figural que transforma la figura de inicio en otra de contorno global distinto y en el proceso puede o no conservarse la cantidad de área.	Operatoria	Tratamiento
	Parcial: alude a modificaciones de naturaleza óptica y posicional. En estos casos la forma y el contorno de la figura de partida permanecen invariantes. Únicamente cambia, respectivamente, su área o su posición en el plano. Este tipo de transformación es el efecto de la aplicación de operaciones de rotación, traslación	Operatoria	Tratamiento
	Intermitente: las modificaciones se aplican sobre unidades constituyentes de dimensión 2 de la figura de partida. La organización perceptual de las unidades cambia momentáneamente y la figura de partida no sufre transformación alguna. Se encuentra en tareas donde se solicita calcular mediante conteo el área de una figura que está descompuesta en subfiguras, algunas de ellas con	Operatoria	Tratamiento

	forma y cantidad de área iguales a la unidad asignada, otras con forma distinta y con una fracción del área de la unidad de medida: un medio, un cuarto, etc. La resolución de la actividad propuesta exige la unión de algunas de las fracciones de unidad y el conteo de las veces que la unidad seleccionada es necesaria para cubrir la superficie de la figura		
Cambio dimensional: las figuras bidimensionales imponen, según la primera de las leyes gestálticas de organización y reconocimiento perceptivo de las formas, una prioridad en la discriminación de unidades 2D sobre unidades 1D y 0D.	***Fijo: s***i bien la superficie y las unidades figurales de dimensión 1 y 0 son asumidas una y otras como piezas constitutivas de la figura, las segundas suelen ser reconocidas como elementos fijos, estáticos, no separables de la primera.	Discursiva	Conversión
	Desdoblamiento Por lo menos una de las unidades de dimensión 1 que constituyen la figura de partida es discriminada de manera independiente a la superficie de la figura de la cual forma parte, a la vez que se asume como un elemento constitutivo en dos o más	Discursiva	Conversión

	subfiguras o subconfiguraciones distintas presentes en la figura de inicio y sobre las cuales se reflexiona.		
Cambio de focalización bidimensional Se refiere a la manera de centrar la atención en las características globales 2D de la figura de partida y a hacerlo en sus partes 2D constituyentes (subfiguras o sub-configuraciones)	***Configural:*** proceso de comparación entre dos o más figuras a partir de sus características globales, sean éstas entre la figura de partida y de llegada o entre varias figuras de partida. Este tipo de cambio de focalización está presente en tareas donde se solicita, a partir de varias figuras, "armar" una nueva cuya área es igual a la suma de las áreas de las figuras inicialmente dadas.	Operatoria y perceptual	Conversión
Flujo Visual: secuencia visual aplicada en el desarrollo de las actividades propuestas, es decir, a la manera de como se organizan los distintos cambios (figural, dimensional, focalización 2D) y las	***Circuito:*** *a*lude al hecho de que en algún momento del flujo visual es necesario apoyarse en más de una ocasión en alguna(s) de las características perceptuales de la figura de partida la atención recae en una de las partes constituyentes de la configuración de partida y se aplica en ella un cambio en la manera de ver una operación.	Operativa y discursiva	No aplica

operaciones considerados en el desarrollo o comprensión de la actividad planteada en el desarrollo de la tarea propuesta.	Además, a continuación se consideran las características perceptuales de la figura de inicio y se inicia un nuevo flujo de naturaleza lineal. Es indispensable tener en cuenta diferentes partes de la configuración inicial (unidades 0D, 1D, subfiguras, subconfiguraciones) y se aplican sobre algunas de ellas, no en todas, operaciones o cambios en la manera de ver.		

Anexo B. Articulación entre las actividades cognoscitivas, los objetivos específicos y las fases. Fuente: Elaboración propia.

ACTIVIDADES COGNOSCITIVAS	OBJETIVOS ESPECÍFICOS	FASES	DESEMPEÑOS ESPERADOS
DIAGNÓSTICO	1.- Identificar en los estudiantes, los conocimientos previos que poseen en el proceso de factorización de polinomios de hasta segundo orden, por medio de una prueba diagnóstica.	Fase 1 Información ¿Qué es un factor y como se representan geométricamente?	- Identifica los factores primos de un número real - Calcula el perímetro y área de figuras rectangulares. - Relaciona expresiones factoriales con el área o el volumen de una figura geométrica. - Utiliza el lenguaje matemático adecuado para referirse a situaciones que relacionan factores. - Factoriza polinomios utilizando métodos convencionales. - Representa gráficamente factorizaciones numéricas y polinómicas.
FORMACIÓN TRATAMIENTO CONVERSIÓN	Lograr que los estudiantes adquieran un dominio de dos o más registros de representación en el proceso de factorización que los vincule a la	Fase 2 Orientación dirigida ¿Qué es la caja de polinomios? ¿Cómo operar geométricamente	- Identifica las medidas de una figura geométrica en términos de variables - Relaciona el perímetro y el área de una figura geométrica con expresiones algebraicas.

	comprensión del concepto por medio de las actividades cognitivas: formación, tratamiento y conversión, para lo cual se utilizan secuencias didácticas.	con polinomios en el plano?	- Identifica expresiones algebraicas a través de figuras geométricas por medio de la composición de sus áreas. - Identifica en el plano cartesiano el valor de cada figura geométrica de acuerdo a su posición con respecto al origen y al cuadrante. - Comprende y utiliza el concepto de “cero” en el plano cartesiano. - Representa polinomios en el plano cartesiano en forma rectangular. - Resuelve operaciones básicas de suma y multiplicación de polinomios aplicando el álgebra geométrica en el plano cartesiano. - Utiliza el lenguaje natural al referirse a un polinomio y sus operaciones. -Utiliza el lenguaje matemático adecuado al momento de comunicar sus ideas.

		Fase 3 Explicitación ¿La factorización se puede ver geométricamente?	- Identifica por medio de expresiones algebraicas, la base y la altura de un polinomio representado en forma rectangular. - Relaciona la base y la altura del polinomio representado con los factores de la factorización algebraica. - Factoriza polinomios con raíces enteras con el álgebra geométrica. - Utiliza el lenguaje natural al referirse a la factorización de un polinomio - Utiliza el lenguaje matemático adecuado al momento de comunicar sus ideas.
TRATAMIENTO CONVERSIÓN		Fase 4, Orientación libre ¿Cómo realizar conversiones de lo geométrico a lo simbólico?	- Identifica cuándo un polinomio no es factorizable en el conjunto de los números enteros por medio de la herramienta didáctica del álgebra geométrica y propone soluciones. - Realiza representaciones geométricas de

			factorizaciones simbólicas y viceversa. - Comprueba por medio del álgebra geométrica la factorización realizada algebraicamente. - Utiliza el lenguaje matemático adecuado al momento de comunicar sus ideas.
	Validar o evaluar la propuesta didáctica por medio de una prueba de conocimiento que permita identificar el nivel de comprensión alcanzado.	Fase 5, Integración: Cierre y Evaluación	- Factoriza polinomios en forma algebraica y geométrica - Verifica en cualquiera de los registros la validez del resultado. - Identifica el polinomio factorizado a partir de su representación geométrica o algebraica. - Utiliza el lenguaje natural al referirse a la factorización en cualquier registro. - Utiliza el lenguaje matemático adecuado al momento de comunicar sus ideas.

Anexo C. Fase 2. Orientación Dirigida. Actividad 1. Repaso de Conceptos

Institución Educativa "INEM FELIPE PÉREZ"
Área de Matemáticas
Fase 2 Actividad # 1
REPASO DE CONCEPTOS

Desempeños:
- Identifica los factores primos de un número real y su aplicación
- Conceptualiza el significado de variable en una medida
- Calcula el perímetro y área de figuras rectangulares numérica y algebraicamente
- Utiliza el lenguaje matemático adecuado para referirse a situaciones que relacionan factores.
- Factoriza polinomios utilizando métodos algebraicos.

¿Qué es un factor y como se representan geométricamente?

El término **factor**, tiene diversos usos. En el campo de las **matemáticas**, se conoce como factor a cada una de las cantidades o expresiones que pueden multiplicarse para formar un **producto**.
La **descomposición factorial o factorización** es una operación numérica o algebraica para expresar un **número** como el producto de otros factores más pequeños (pueden ser primos o compuestos).

Es decir, la multiplicación de estos factores da como resultado el número original.

Por ejemplo:

El número 21 puede factorizarse en la multiplicación de los números primos 3 y 7

$$21 = 3 \times 7$$

El número 48 puede factorizarse en la multiplicación de números primos o compuestos, así

$$48 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3$$
$$48 = 12 \times 4$$
$$48 = 4 \times 4 \times 3$$

Para encontrar los factores de un número, la forma más usada consiste en ir dividiendo el número entre sus divisores primos, hasta que solo quede el número 1, así:

$$\begin{array}{r|l} 48 & 2 \\ 24 & 2 \\ 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

De aquí que:

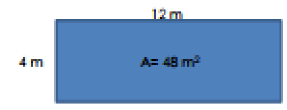
$$48 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3$$

Estas cantidades numéricas pueden representarse geométricamente de muchas formas, dependiendo de los factores en que se exprese, es decir:

El solo valor de 48, si le asignamos una unidad de medida como el metro, es decir, 48 m. se representa por un segmento de recta el cual puede ser una medida lineal de un objeto, por ejemplo la distancia de una calle, el tamaño de una soga, la altura de un edificio, el ancho de una cancha, etc.

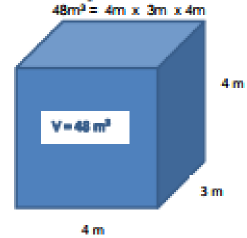
También puede ser representado por un área de una figura geométrica si está expresado en dos de sus factores

$$A = \text{largo} \times \text{ancho}$$
$$48\ m^2 = 12m \times 4m$$



Y si es un volumen 48 m³ puede ser expresado en tres de sus factores así:

$$V = \text{largo} \times \text{ancho} \times \text{altura}$$
$$48m^3 = 4m \times 3m \times 4m$$



¿Qué es una variable?

Una variable es un concepto multifacético, se representa con un símbolo (en matemáticas se usa una letra del alfabeto, por lo general las últimas del abecedario x, y, z) que permite identificar a una cantidad numérica.

Institución Educativa "INEM FELIPE PÉREZ"

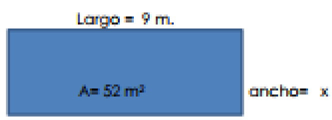
Área de Matemáticas

Fase 2 Actividad # 1

Una variable se utiliza por tres razones (modelo 3UV):

1) Como incógnita, es decir, para representar una cantidad desconocida o como patrón de medida, y generalmente se halla por medio de una ecuación dependiendo del problema a solucionar;
2) Cómo número general, es decir, para representar una cantidad que puede cambiar, para representar un patrón, regla o generalización de una situación que varía;
3) Y como relación funcional, es decir, para representar una cantidad que está relacionada con otra, así mismo como sus variaciones.

Ejemplo 1: De un lote de terreno rectangular se sabe que tiene un área de 52 m^2 como lo indica la figura

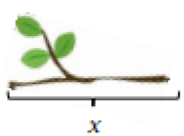


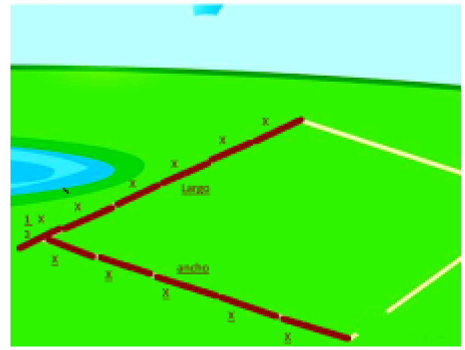
En este caso como se desconoce la medida del ancho se utiliza un símbolo como la x para representar el valor desconocido, que al plantearlo en la solución del problema se convierte en incógnita:

$A = b.h \quad \rightarrow \quad 52 = 9.x$

Ejemplo 2: Un grupo de scouts acampan en un bosque al lado de un riachuelo. Dado que el espacio es ideal para traer a un grupo más numeroso, quieren medir el sector, pero no cuentan con instrumentos de medida.

El jefe de los scout dice que eso no es problema, toma una rama casi recta de un árbol cuya medida es desconocida para todos, por lo tanto la llamó "x", y empieza a medir el sector así:





Por lo tanto el largo mide:

$L = x + x + x + x + x + \frac{1}{3}x$, *por ser términos semejantes se suman,* $L = 5\frac{1}{3} \cdot x$

Y el ancho:

$A = x + x + x + x + x$, *sumando,* $A = 5 \cdot x$

De esta manera, cuando puedan conseguir un instrumento de medida como el metro, pueden medir el tamaño de la rama (x), reemplazar en el largo y el ancho, y obtener los valores reales para saber cuántas carpas pueden instalar en su próxima salida!!

¿Qué es y cómo se halla el Perímetro y Área de una figura?

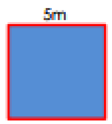
Perímetro proviene del griego, donde el prefijo ***peri*** puede traducirse como sinónimo de "alrededor" y, en segundo lugar, ***metrón*** que es equivalente a "medida", se refiere al contorno de una superficie o de una figura y a la ***medida de ese contorno.***

En otras palabras, en una figura, el perímetro es la suma de todos sus lados. De esta manera, el perímetro permite calcular la frontera de una superficie.

Fase 2 Actividad # 1

Por otra parte, el término área se refiere a la medida de la superficie interior, es decir, es la medida del espacio que hay dentro del contorno o perímetro.

Para hallar el perímetro y área de algunas figuras geométricas básicas como el cuadrado y el rectángulo se procede de la siguiente manera.



Como en el cuadrado todos sus lados tienen la misma medida, entonces:

P= 5m + 5m + 5m + 5m

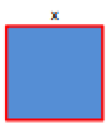
P= 20m

A= lado vertical x lado horizontal

A= 5m · 5m A= 25 m^2

En conclusión, su contorno (de color rojo) mide 20 m. y su área, es decir, la superficie interior (de color azul) mide 25 m^2. Es de notar que el perímetro se mide en unidades de longitud (m) y el área se mide en unidades cuadradas (m^2).

Si la figura tiene medidas desconocidas, entonces utilizamos una variable para representar dicha medida:



Como todos sus lados miden lo mismo

P= x + x + x + x = 4x

A= lado vertical x lado horizontal

A= x · x = x^2

En un rectángulo:

Esta figura cuenta con dos lados paralelos de igual medida denominados "largo" que por lo general son los de mayor medida, y otro par de lados paralelos de igual medida denominados "ancho", que por lo general son los de menor medida.

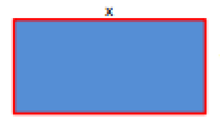
P= 15 km + 3 km + 15 km + 3 km = 36 km

A= largo · ancho

A= 15 km · 3 km = 45 km^2.

Por lo tanto el contorno del rectángulo mide 36 km y su área 45 km^2. Nuevamente, haciendo notar las unidades longitudinales del perímetro y las unidades cuadradas del área.

Si las medidas son desconocidas, entonces como sabemos que tiene dos pares de lados de igual medida pero de dimensiones distintas, debemos utilizar dos variables distintas para diferenciar la una de la otra



Aquí hemos representado la medida del largo con la variable "x" y la medida del ancho con la variable "y"

P= x + y+ x + y (sumando términos semejantes)

P= 2x + 2y

A= largo · ancho A= x · y = xy

¿Qué es un polinomio y cómo se factoriza?

Un polinomio es una expresión matemática constituida por una ***suma finita*** de ***productos entre variables*** (*valores no determinados* o desconocidos) **y constantes** (números fijos llamados coeficientes). Las variables pueden tener exponentes de valores definidos naturales incluido el cero y cuyo valor máximo se conocerá como grado del polinomio. En términos más simples, un polinomio es ***una suma de monomios***.

Un polinomio de una variable se escribe en forma general:

$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} \ldots + a_1 x + a_0$, donde a_n son los coeficientes (valores constantes) y x^n son las potencias de x (variables).

Un polinomio en particular es por ejemplo:

$P(x) = x^2 - 12\,x + 27$, cuyo mayor exponente es 2 y se dice que es cuadrática o de grado 2.

Institución Educativa "INEM FELIPE PÉREZ"

Área de Matemáticas

Fase 2 Actividad # 1

$$P(x) = \boxed{a_n x^n} + \boxed{a_{n-1} x^{n-1}} \ldots + \boxed{a_1 x} + \boxed{a_0}$$

Monomios

$$P(x) = \boxed{x^2} - \boxed{12\,x} + \boxed{27}$$

En el apartado anterior donde hablamos de lo que es una variable, se definió que sirve *"Para representar una cantidad que puede cambiar"*

En este caso, la "x" aparte de ser una cantidad desconocida, puede ser una cantidad que puede variar, veamos:

Si "x" toma un valor cualquiera, ejemplo x= 2, el polinomio se convertiría en un número (valor numérico) cuando al reemplazar la "x" por el 2, el polinomio se convierte en una operación combinada de potencias, multiplicaciones, sumas y restas, así:

$P(x) = x^2 - 12\,x + 27$ $\quad\quad$ $si\ x = 2$

Entonces,

$P(2) = (2)^2 - 12 \cdot 2 + 27$

$P(2) = 4 - 24 + 27$

$P(2) = 7$

Ahora si realizamos la descomposición factorial del polinomio, aplicando una de las reglas algebraicas de factorización nos quedaría:

$P(x) = x^2 - 12\,x + 27 \quad = \quad \underbrace{(x-9)(x-3)} \longrightarrow$ Donde éstos polinomios de menor grado serían los factores primos del polinomio.

Comprobémoslo numéricamente:

Si x=2

$P(2) = (2)^2 - 12 \cdot 2 + 27 \quad = \quad (2-9)(2-3)$

$P(2) = 7 \quad = \quad (-7)(-1)$ que efectivamente son dos factores de 7

Ensayemos con otro valor de x. Si x= 5

$P(5) = (5)^2 - 12 \cdot 5 + 27 \quad = \quad (5-9)(5-3)$

$P(5) = -8 \quad = \quad (-4)(2)$ y efectivamente son dos factores de -8

Por lo tanto la factorización (o descomposición factorial) de polinomios, no es más que la descomposición de números que están representados por el polinomio en sí.

Algunos métodos algebraicos de factorización son:

RELACION ENTRE PRODUCTOS NOTABLES Y FACTORIZACION			
PRODUCTOS NOTABLES ⟵		⟶ FACTORIZACION	
1.- Multiplicación de un monomio por un polinomio	$a(b+c)$	$ab + ac$	1.- Factor común monomio
2.- Multiplicación de dos polinomios	$(a+b)(c+d)$	$ac + ad + bc + bd$	2.- Factor común por agrupación
3.- Producto de la suma por la diferencia de dos cantidades iguales	$(a+b)(a-b)$	$a^2 - b^2$	3.- Diferencia de cuadrados perfectos
4.- Producto de la forma $(a+b)(a^2-ab+b^2)$	$(a+b)(a^2-ab+b^2)$	$a^3 + b^3$	4.- Suma o diferencia de cubos perfectos
5.- Producto de la forma $(a-b)(a^2+ab+b^2)$	$(a-b)(a^2+ab+b^2)$	$a^3 - b^3$	
6.- Cuadrado de la suma de dos cantidades	$(x+a)^2$	$x^2 + 2ax + a^2$	5.- Trinomio cuadrado perfecto
7.- Cuadrado de la diferencia de dos cantidades	$(x-a)^2$	$x^2 - 2ax + a^2$	
8.- Producto de binomios de la forma $(x+a)(x+b)$	$(x+a)(x+b)$	$x^2 + (a+b)x + ab$	6.- Trinomio de la forma $x^2 + bx + c$
9.- Productos de binomios de la forma $(mx+a)(nx+b)$	$(mx+a)(nx+b)$	$mnx^2 + (bm+an)x + ab$	7.- Trinomio de la forma $ax^2 + bx + c$

Anexo D. Certificados en Ponencias.

Universidad Tecnológica de Pereira

El Departamento de Matemáticas de
la Facultad de Ciencias Básicas

CERTIFICA

Qué

LUZ PATRICIA RODRIGUEZ
C.C 42095765

Participó:
En el **Encuentro Regional de Matemáticas** los días 19, 20 y 21 de octubre, con la ponencia:
"El Álgebra geométrica como mediadora en el aprendizaje de la factorización de polinomios"

Fernando Mesa
Director del Departamento de Matemáticas
Universidad Tecnológica de Pereira

Hugo Armando Gallego
Decano de la Facultad de Ciencias Básicas
Universidad Tecnológica de Pereira

En constancia se firma en la Universidad Tecnológica de Pereira, a los 3 días del mes de noviembre de 2016

Universidad Tecnológica de Pereira
Reacreditada como Institución de Alta Calidad por el MEN 2013-2021
Certificada en Gestión de Calidad ISO 9001:2008 – Gestión Pública NTC GP 1000:2009